

Límites

Propiedades

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

Límites Notables

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

L'Hôpital

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ da $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Asíntotas

Vertical $x = a$: $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$

Horizontal $y = b$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

Oblicua $y = mx + b$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$$

Continuidad

f continua en $x = a \iff$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- $f(a)$ existe
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
- Ambos son iguales

Tipos de discontinuidad

Evitable: existe \lim pero $\neq f(a)$ o $f(a)$ no existe.

Salto finito: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existen pero \neq .

Esencial: algún lateral es $\pm\infty$ o no existe.

Derivadas

Definición

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Reglas de Derivación

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tabla de Derivadas

$f(x)$	$f'(x)$
k (cte)	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Derivada de función inversa

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{donde } y = f(x)$$

Recta tangente y normal

Tangente en x_0 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Normal en x_0 :

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Análisis de Funciones

Crecimiento / Decrecimiento

- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ **crece**
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ **decrece**
- $f'(x) = 0 \Rightarrow$ **punto crítico**

Máximos y Mínimos

Criterio 1ª derivada:

- f' pasa de + a -: **máximo relativo**
- f' pasa de - a +: **mínimo relativo**

Criterio 2ª derivada:

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) < 0 & \Rightarrow \text{máx. rel.} \\ f''(x_0) > 0 & \Rightarrow \text{mín. rel.} \end{cases}$$

Concavidad y Puntos de Inflexión

- $f''(x) > 0$: cóncava hacia arriba (\cup)
- $f''(x) < 0$: cóncava hacia abajo (\cap)
- $f''(x) = 0$ y cambia signo: **punto de inflexión**

Función compuesta – 2ª derivada

$$[f(g(x))]'' = f''(g(x)) \cdot [g'(x)]^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x)$$

Funciones Elementales

Exponencial y Logaritmo

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Inecuaciones útiles

Intervalos

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$|x| < a \iff -a < x < a \quad (a > 0)$$

$$|x| > a \iff x < -a \cup x > a \quad (a > 0)$$

Números y conjuntos

Símbolo	Significado
\mathbb{N}	Naturales: $1, 2, 3, \dots$
\mathbb{Z}	Enteros: $\dots, -2, -1, 0, 1, \dots$
\mathbb{Q}	Racionales: p/q
\mathbb{R}	Reales
\emptyset	Conjunto vacío
\in	Pertenece a
\subseteq	Subconjunto
\cup	Unión
\cap	Intersección

Teorema del Valor Medio

Si f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) :

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema de Rolle

Si f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$:

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$