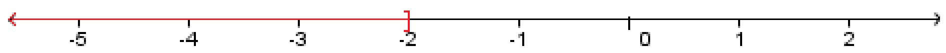
## UNIDAD TEMÁTICA 5

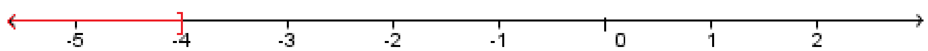
## PROGRAMACION LINEAL

**1)** Halle gráficamente, en cada caso, el conjunto solución

***a)*** En $\Re$: $-2x + 3 \geq 7 \;\Rightarrow\; \boxed{x \leq -2}$




***b)*** En $\Re$: $5 \leq -2x - 3 \;\Rightarrow\; \boxed{x \leq -4}$




***c)*** En $\Re^2$: $y > 6 - 2x$

Representamos la recta $y = -2x + 6$ y la expresión segmentaria de la recta es :

$$\boxed{\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1}$$

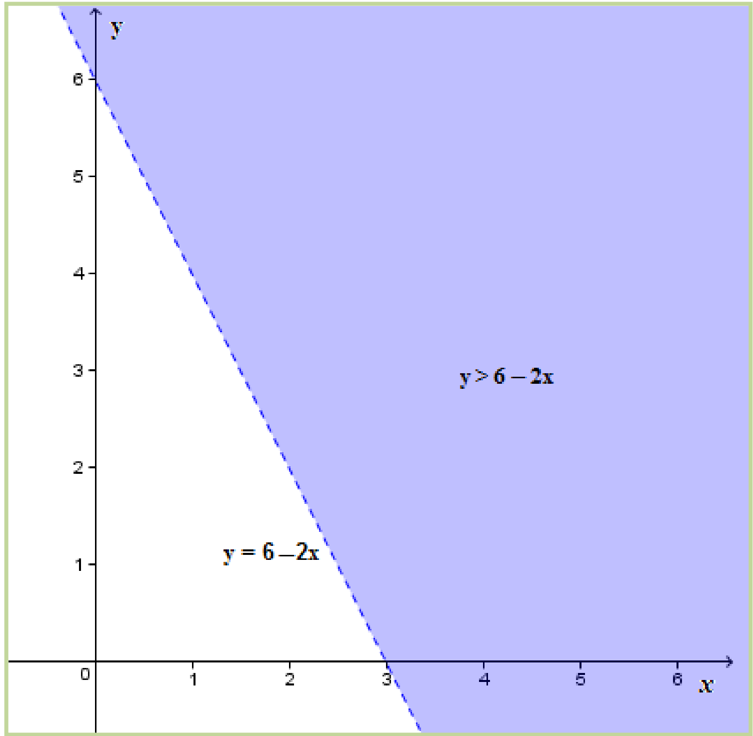
Debemos elegir el conjunto de puntos que cumplen con la desigualdad

Para ello tomamos como punto testigo al $(0;0)$

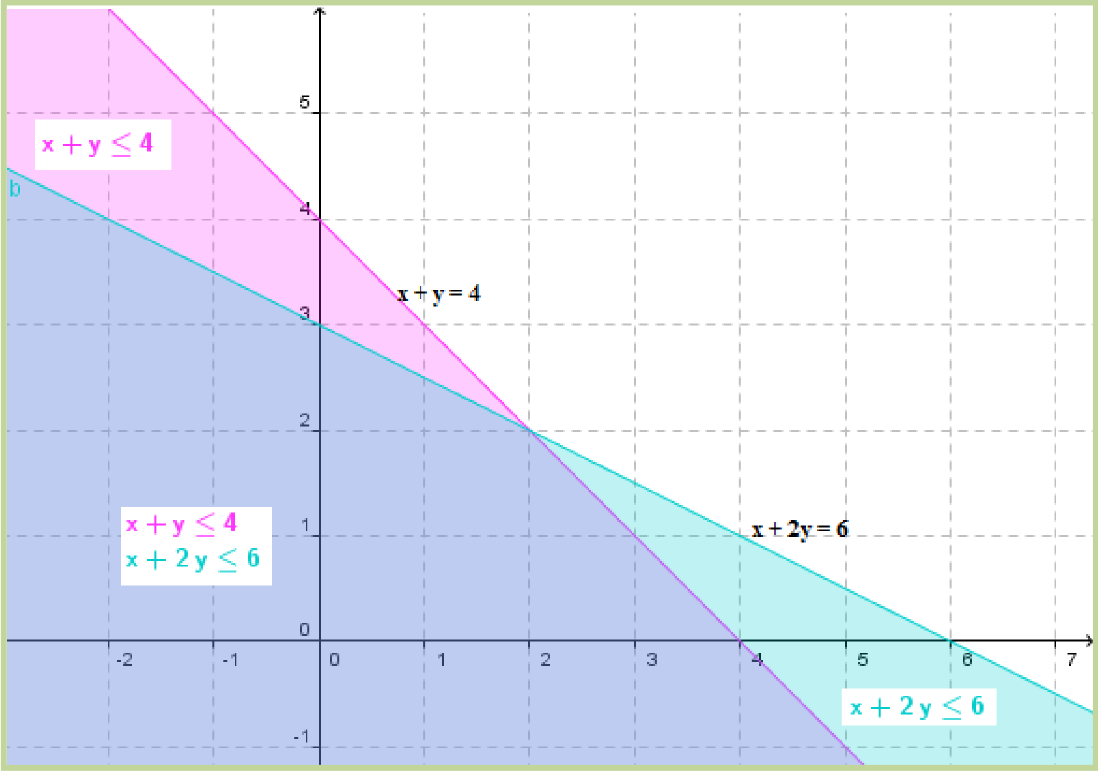
¿$(0;0)$ cumple con $y > -2x + 6$?

Reemplazamos el punto $(0;0)$ en la desigualdad y obtenemos : $0 > 6$ Falso

Entonces pintamos el semiplano que <u>no</u> contiene al $(0;0)$



***d)*** En $\Re^2$: $\begin{cases} x + \ \ y \le 4 \\ x + 2y \le 6 \end{cases}$




$*\quad x + y \le 4$

Representamos la recta : $x + y = 4 \Rightarrow \boxed{\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{4} = 1}$

Tomamos como punto testigo al **(0;0)**

¿**(0;0)** cumple con $x + y \le 4$?

Reemplazamos el punto **(0;0)** en la desigualdad y nos queda : $0 \le 4$ Expresión Verdadera

Se pinta entonces el semiplano que contiene al **(0;0)**

$*\quad x + 2y \le 6$

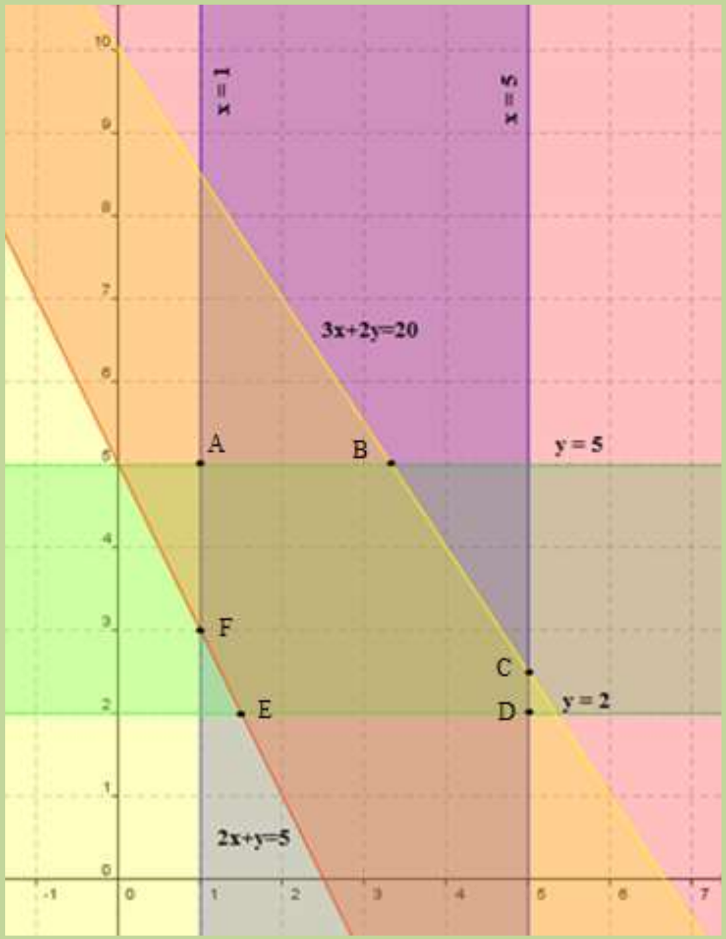
Representamos la recta : $x + 2y = 6 \Rightarrow \boxed{\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{3} = 1}$

Tomamos como punto testigo al **(0;0)**

¿**(0;0)** cumple con $x + 2y \le 6$?

Reemplazamos el punto **(0;0)** en la desigualdad y nos queda : $0 \le 6$ Expresión Verdadera

Se pinta entonces el semiplano que contiene al ( **0;0)** *e)* En $\Re^2$: $\begin{cases} 1 \le x \le 5 \\ 2 \le y \le 5 \\ 2x + y \ge 5 \\ 3x + 2y \le 20 \end{cases}$




* $1 \le x \le 5$

En este caso representamos las rectas: $x = 1 \wedge x = 5$

Luego pintamos la banda determinada por las desigualdades: $1 \le x \wedge x \le 5$

* $2 \le y \le 5$

En este caso representamos las rectas: $y = 2 \wedge y = 5$

Luego pintamos la banda determinada por las desigualdades: $2 \le y \wedge y \le 5$

* $2x + y \ge 5$

Representamos el borde: $2x + y = 5 \Rightarrow \boxed{\dfrac{x}{5/2} + \dfrac{y}{5} = 1}$

Tomamos como punto testigo al $(0;0)$ ¿$(0;0)$ cumple con $2x + y \ge 5$?

Reemplazamos el punto $(0;0)$ en la desigualdad y nos queda: $0 \ge 5$ Expresión Falsa

Se pinta entonces el semiplano que no contiene al $(0;0)$

* $3x + 2y \le 20$

Representamos el borde: $3x + 2y = 20 \Rightarrow \boxed{\dfrac{x}{20/3} + \dfrac{y}{10} = 1}$

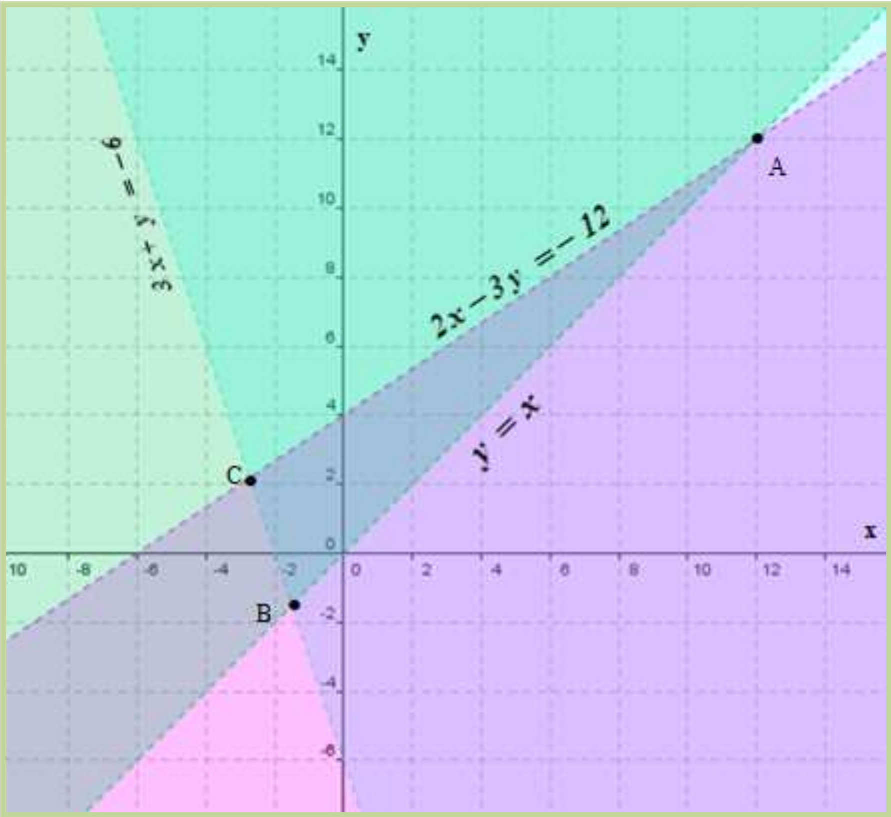
Tomamos como punto testigo al $(0;0)$ ¿$(0;0)$ cumple con $3x + 2y \le 20$?

Reemplazamos el punto $(0;0)$ en la desigualdad y nos queda: $0 \le 20$ Expresión Verdadera

Se pinta entonces el semiplano que contiene al $(0;0)$

Marcamos con negro los vértices de la zona de factibilidad, el polígono ***ABCDEF***, o sea donde se cumplen simultáneamente todas las inecuaciones

***f)*** En $\Re^2$: $\begin{cases} 3x + y > -6 \\ 2x - 3y > -12 \\ y > x \end{cases}$



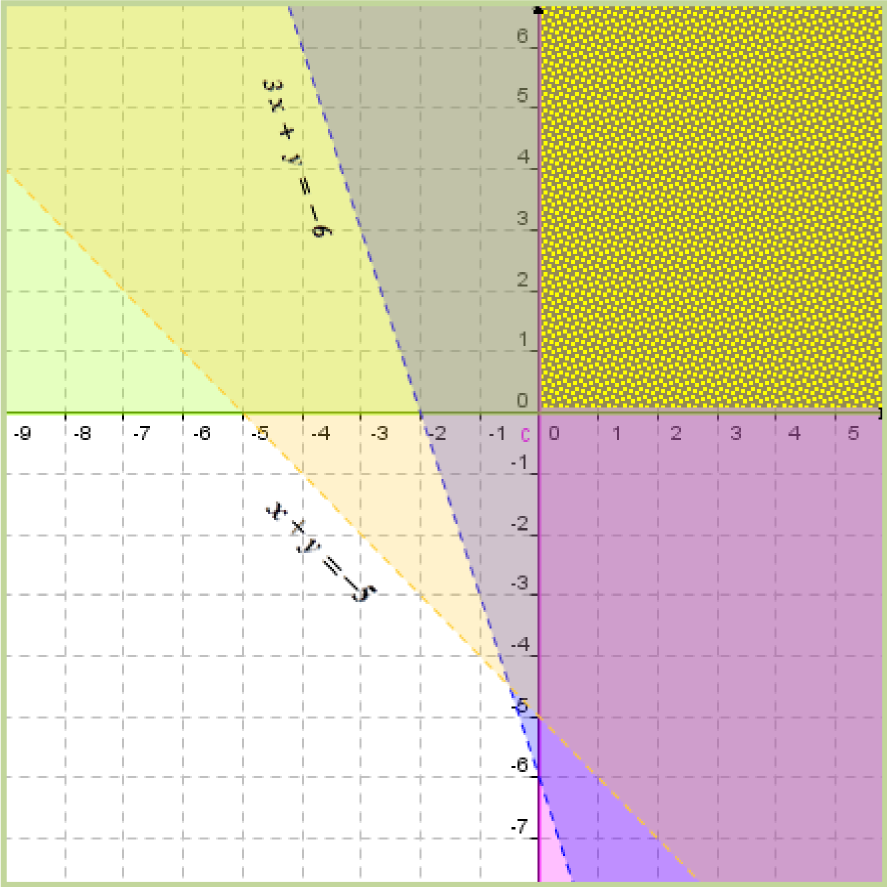

$3x + y > -6$ entonces el borde es $3x + y = -6$, la expresión segmentaria es $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-6} = 1$

$2x - 3y > -12$ entonces el borde es $2x - 3y = -12$, la expresión segmentaria es $\frac{x}{-6} + \frac{y}{4} = 1$

$y > x$ entonces el borde es $y = x$

Marcamos con negro los vértices de la zona de factibilidad, el triángulo ***ABC***, o sea donde se cumplen simultáneamente todas las inecuaciones

***g)*** En $\Re^2$: $\begin{cases} 3x+y > -6 \\ x+y > -5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$




$3x+y>-6$ entonces el borde es $3x+y=-6$, la expresión segmentaria $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-6}=1$

$x+y>-5$ entonces el borde es $x+y=-5$, la expresión segmentaria $\frac{x}{-5}+\frac{y}{-5}=1$

La zona queda reducida al primer cuadrante cuando aplicamos: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Marcamos con el entramado en amarillo la zona de factibilidad, o sea donde se cumplen simultáneamente todas las inecuaciones

**2)** Halle la solución aplicando el método gráfico:

***i.*** Determinar gráficamente el conjunto de soluciones factibles **(CSF)** del modelo.

***ii.*** Identificar cada uno de los vértices del conjunto de soluciones factibles con letras mayúsculas e indicar sus coordenadas.

***iii.*** Calcular el valor de la función objetivo **(Z)** en cada vértice del **CSF**.

***iv.*** En base a los resultados anteriores indicar la solución óptima del modelo (valor de las variables $\boldsymbol{x, y}$ y de la función objetivo (**Z**)

A continuación…

*a)* Minimizar: $Z = x + 2y$

Sujeta a: $\begin{cases} x + y \geq 3 \\ y \geq 1 \end{cases}$

Con $x \geq 0;\ y \geq 0$

La región factible no es acotada

Hallamos los vértices:

$A = (0;3)$ resulta inmediato

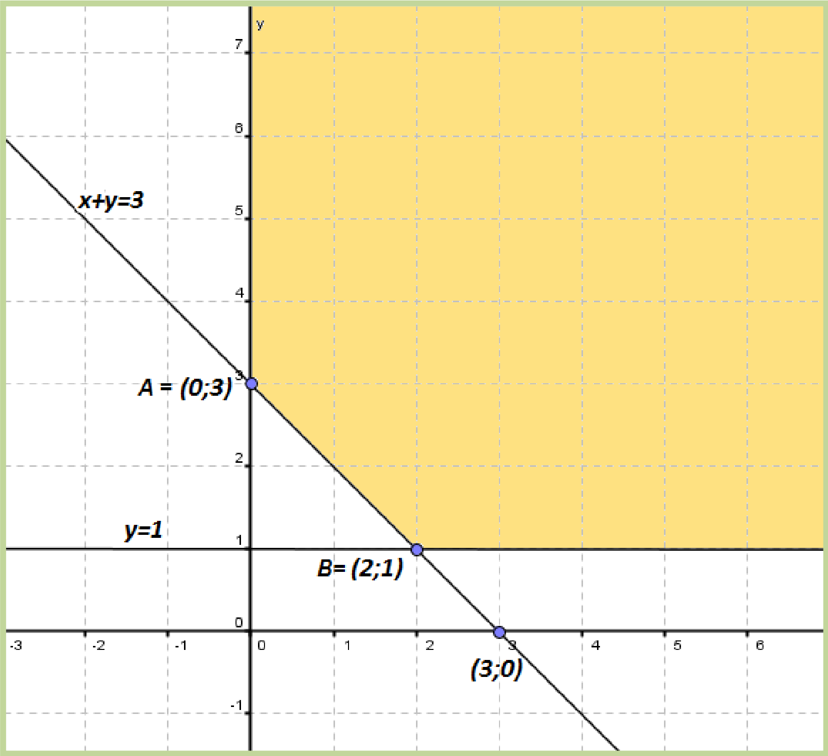
$B = (2;1)$ es solución del sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Evaluamos la función objetivo en los vértices

$Z(0;3) = 1.0 + 2.3 = 6 \rightarrow \boxed{Z(0;3) = 6}$

$Z(2;1) = 1.2 + 2.1 = 4 \rightarrow \boxed{Z(2;1) = 4}$

La función tiene mínimo en ***(2;1)*** y es **4**



***b)*** Maximizar: $Z = 2x + 3y$

Sujeta a: $\begin{cases} 2x + y \le 10 \\ x + 2y \le 8 \end{cases}$

Con $x \ge 0$; $y \ge 0$

La región factible es acotada
Hallamos los vértices:
$(0;0)$ $(0;4)$ $(5;0)$ resultan inmediatos

$(4;2)$ es solución del sistema $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

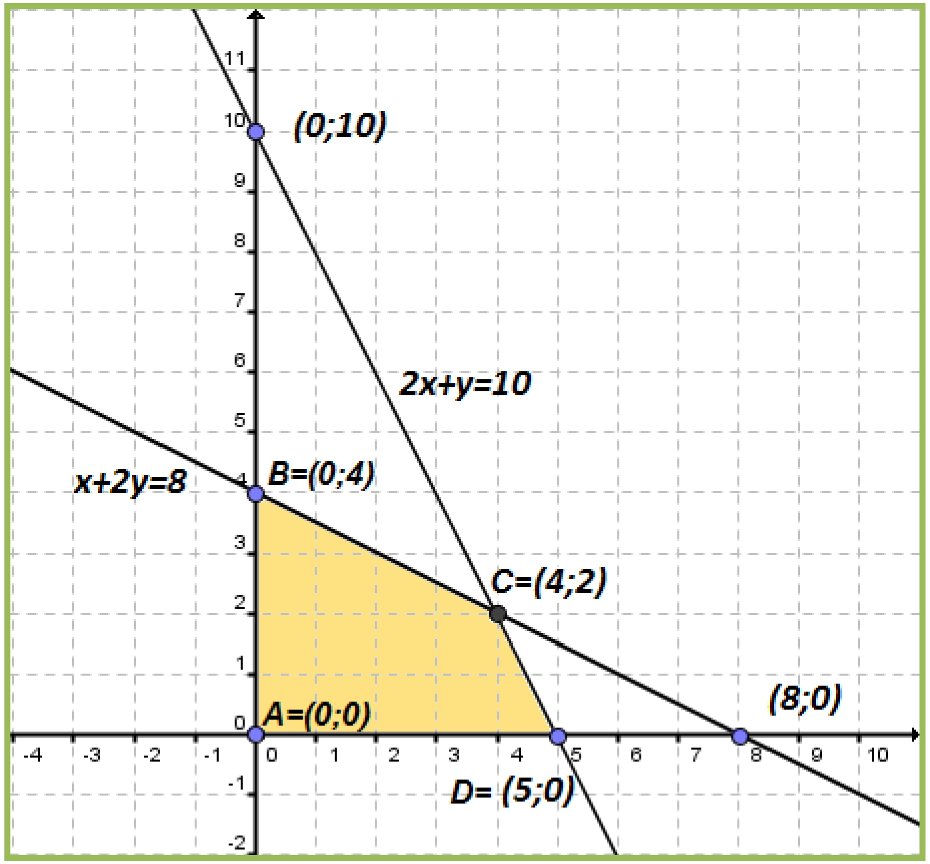
Evaluamos la función objetivo en los vértices

$Z(0;0) = 2.0 + 3.0 = 0 \rightarrow \boxed{Z(0;0) = 0}$

$Z(0;4) = 2.0 + 3.4 = 12 \rightarrow \boxed{Z(0;4) = 12}$

$Z(4;2) = 2.4 + 3.2 = 14 \rightarrow \boxed{Z(4;2) = 14}$

$Z(5;0) = 2.5 + 3.0 = 10 \rightarrow \boxed{Z(5;0) = 10}$



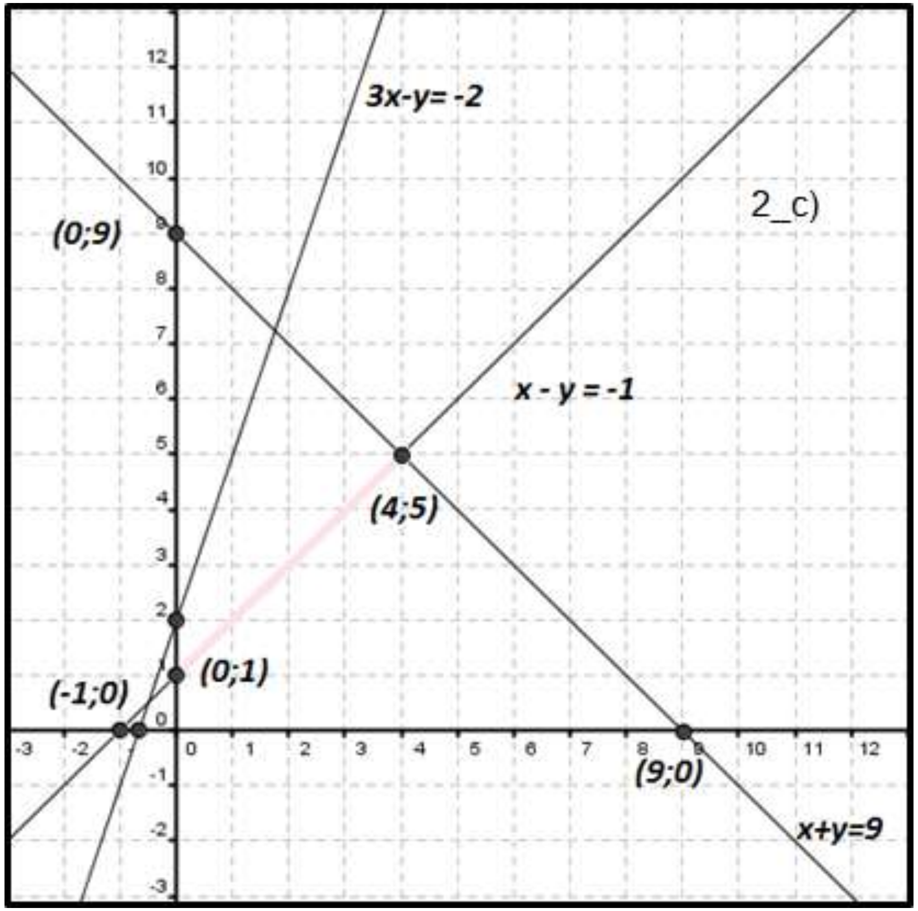

La función tiene máximo en **(4;2)** y es **Z= 14** *c)* Minimizar: $Z = 7x + 3y$

Sujeta a: $\begin{cases} 3x - y \geq -2 \\ x + y \leq 9 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Con $x \geq 0 \,;\, y \geq 0$

La región factible es acotada y es un segmento
Hallamos los extremos (vértices):

$(0;1)$ resulta inmediato y $(4;5)$ es solución del sistema $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -1 \end{cases}$




Evaluamos la función objetivo en los vértices

$Z(0;1) = 7.0 + 3.1 = 3 \rightarrow \boxed{Z(0;1) = 3}$

$Z(4;5) = 7.4 + 3.5 = 43 \rightarrow \boxed{Z(4;5) = 43}$

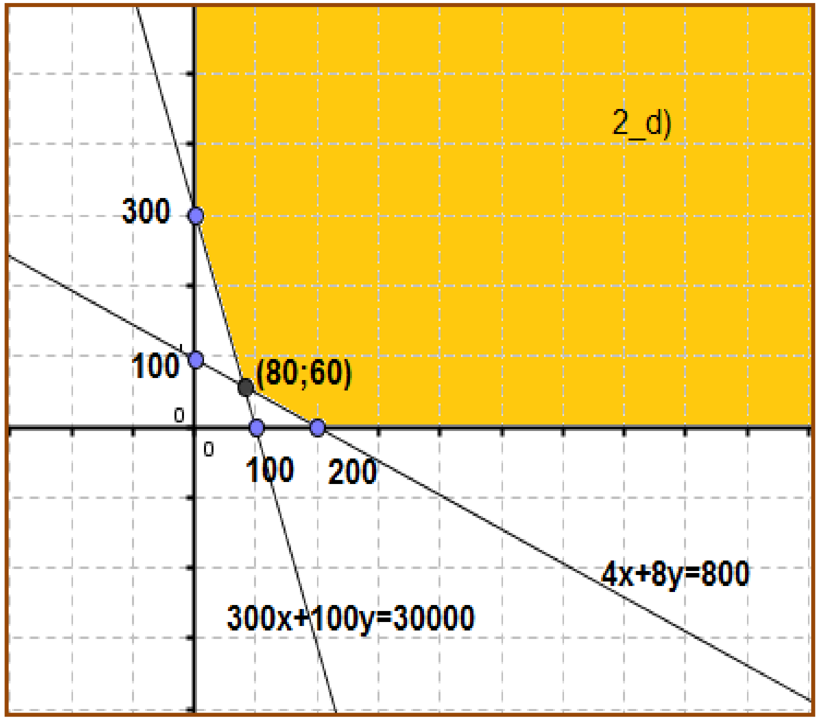
La función tiene mínimo en **(0;1)** y es **Z= 3**

***d)*** Minimizar: $Z = 200x + 100y$

Sujeta a: $\begin{cases} 300x + 100y \geq 30000 \\ 4x + 8y \geq 800 \end{cases}$ Con $x \geq 0 \,;\, y \geq 0$

La región factible no es acotada
Hallamos los vértices:

$(0;300)$ y $(200;0)$ resultan inmediatos y $(80;60)$ es solución del sistema $\begin{cases} 300x + 100y = 30000 \\ 4x + 8y = 800 \end{cases}$




Evaluamos la función objetivo en los vértices

$Z(0;300) = 200.0 + 100.300 = 30000 \rightarrow \boxed{Z(0;300) = 30000}$

$Z(200;0) = 200.200 + 100.0 = 40000 \rightarrow \boxed{Z(200;0) = 40000}$

$Z(80;60) = 200.80 + 100.60 = 22000 \rightarrow \boxed{Z(80;60) = 22000}$

La función tiene mínimo en **$(80;60)$ y es Z= 22000**

***e)*** Maximizar: $Z = 3x + 6y$

Sujeta a: $\begin{cases} x + \ \ y \geq -3 \\ 2x - y \leq \ \ 4 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$

Con $x \geq 0;\ y \geq 0$

La región factible es acotada y es un segmento
Hallamos los extremos (vértices):
$(0;6)$ resulta inmediato y $(4;4)$ es solución del sistema

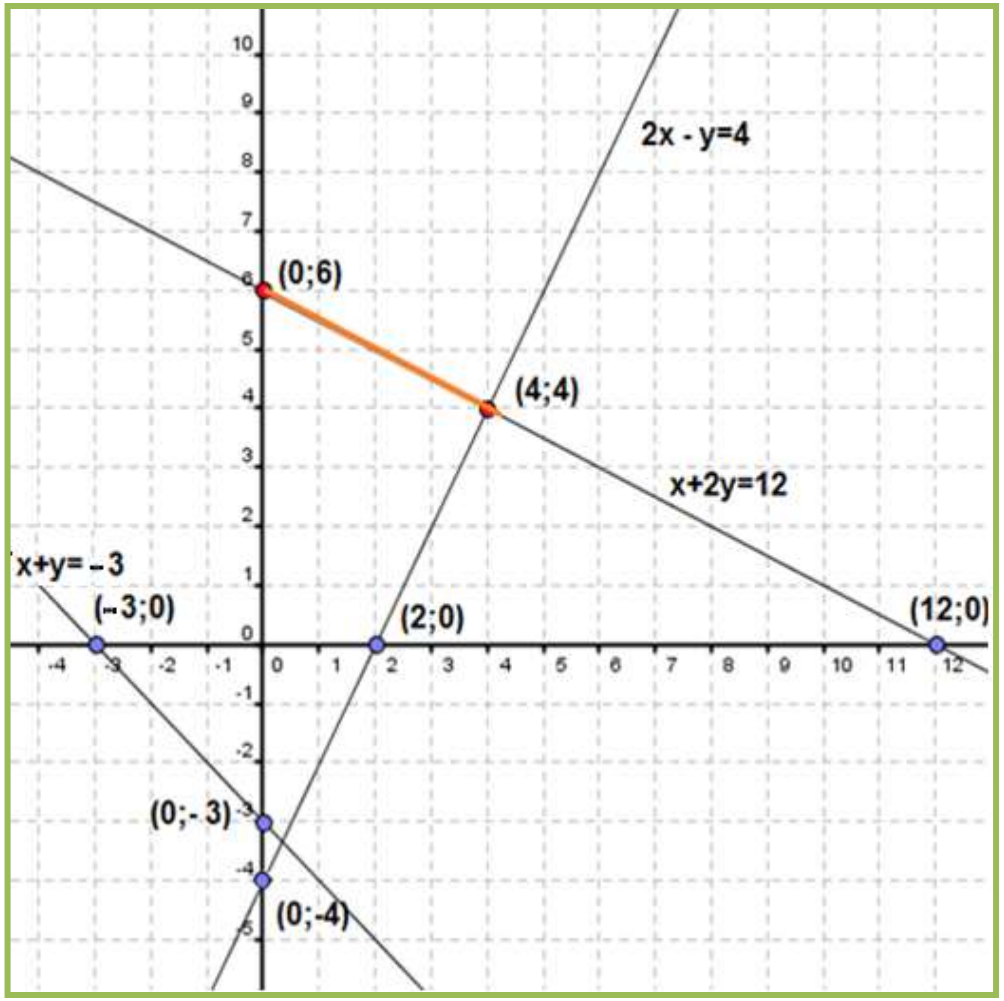
$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ 2x - y = \ \ 4 \end{cases}$

Evaluamos la función objetivo en los vértices

$Z(0;6) = 3.0 + 6.6 = 36 \rightarrow \boxed{Z(0;6) = 36}$

$Z(4;4) = 3.4 + 6.4 = 36 \rightarrow \boxed{Z(4;4) = 36}$

La función no tiene máximo



*f)* Maximizar: $Z = 2x - 4y$

Sujeta a: $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 3x - y \geq -2 \\ x - 4y \leq 0 \end{cases}$ Con $x \geq 0;\ y \geq 0$

La región factible es acotada

Hallamos los vértices:

$(0;0)\ (0;2)$ resultan inmediatos y $(8;2)$ es solución del sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$

$(2;8)$ es solución del sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$

Evaluamos la función objetivo en los vértices

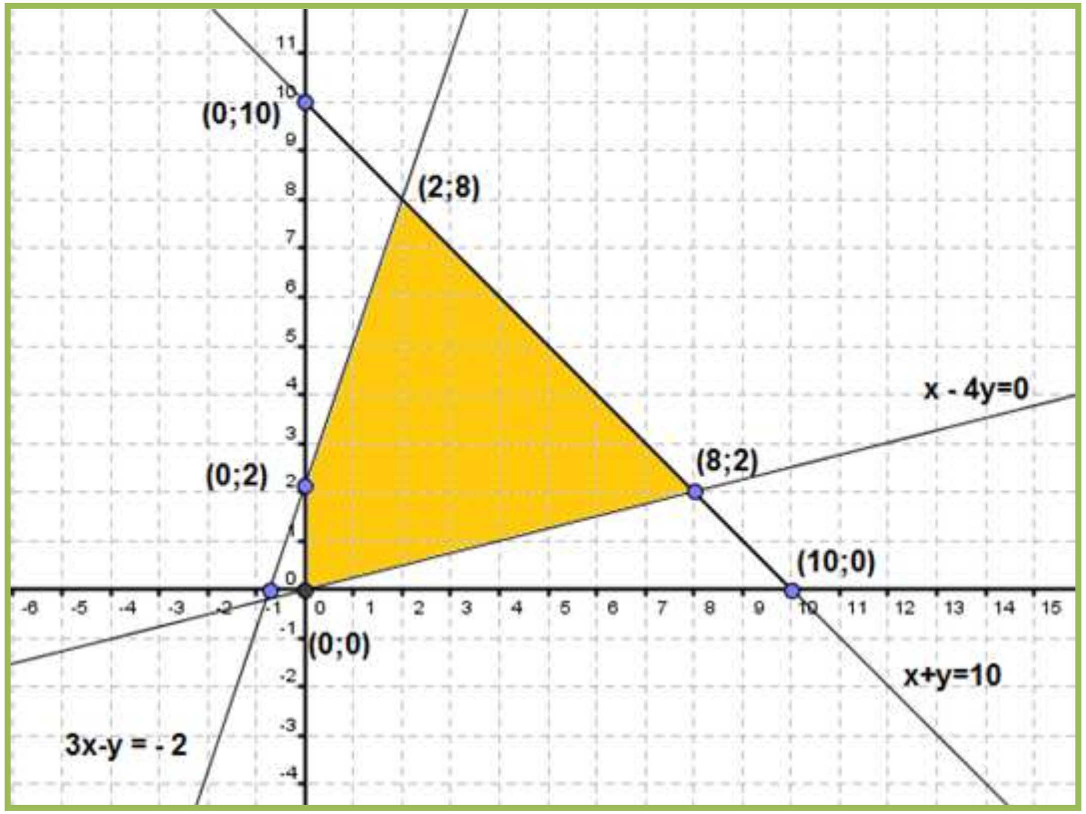
$Z(0;0) = 2.0 - 4.0 = 0 \rightarrow \boxed{Z(0;0) = 0}$

$Z(0;2) = 2.0 - 4.2 = -8 \rightarrow \boxed{Z(0;2) = -8}$

$Z(8;2) = 2.8 - 4.2 = 8 \rightarrow \boxed{Z(8;2) = 8}$

$Z(2;8) = 2.2 - 4.8 = -28 \rightarrow \boxed{Z(4;2) = -28}$

La función tiene máximo en $(8;2)$ y es **Z= 8**



**3)** Indicar una posible función objetivo, para que :

***a)*** La solución óptima que maximice la función objetivo propuesta se encuentre en alguno de los vértices del polígono.

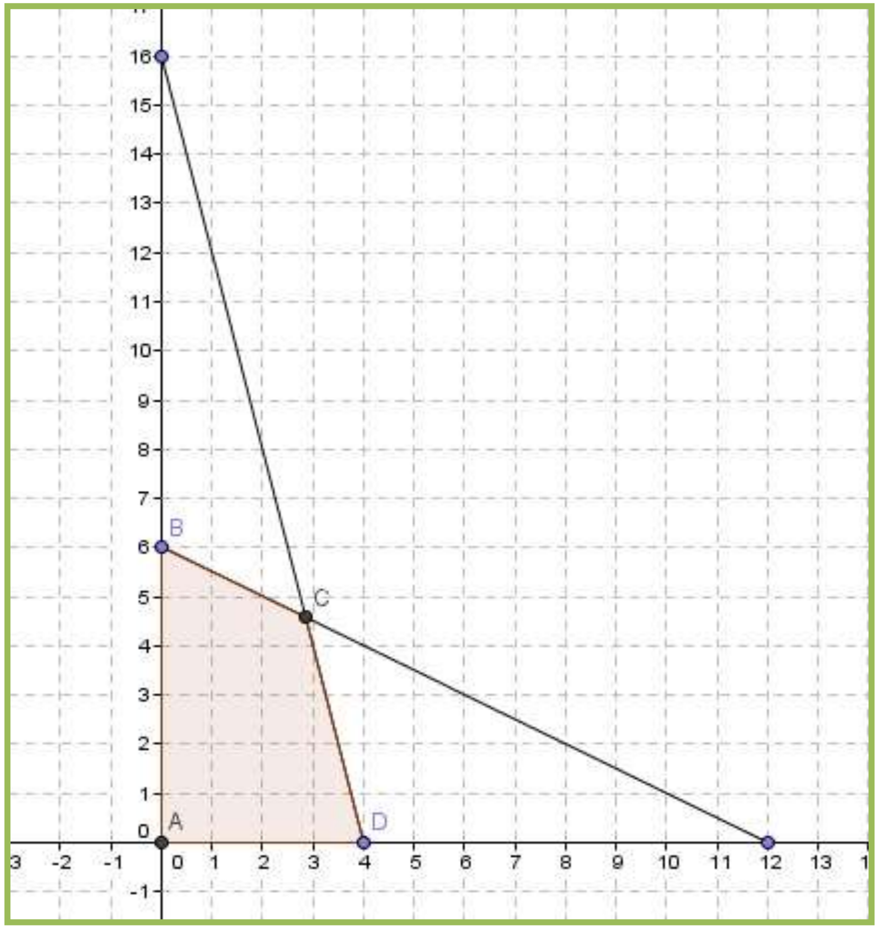
***b)*** Existan soluciones sobre algún lado del polígono.

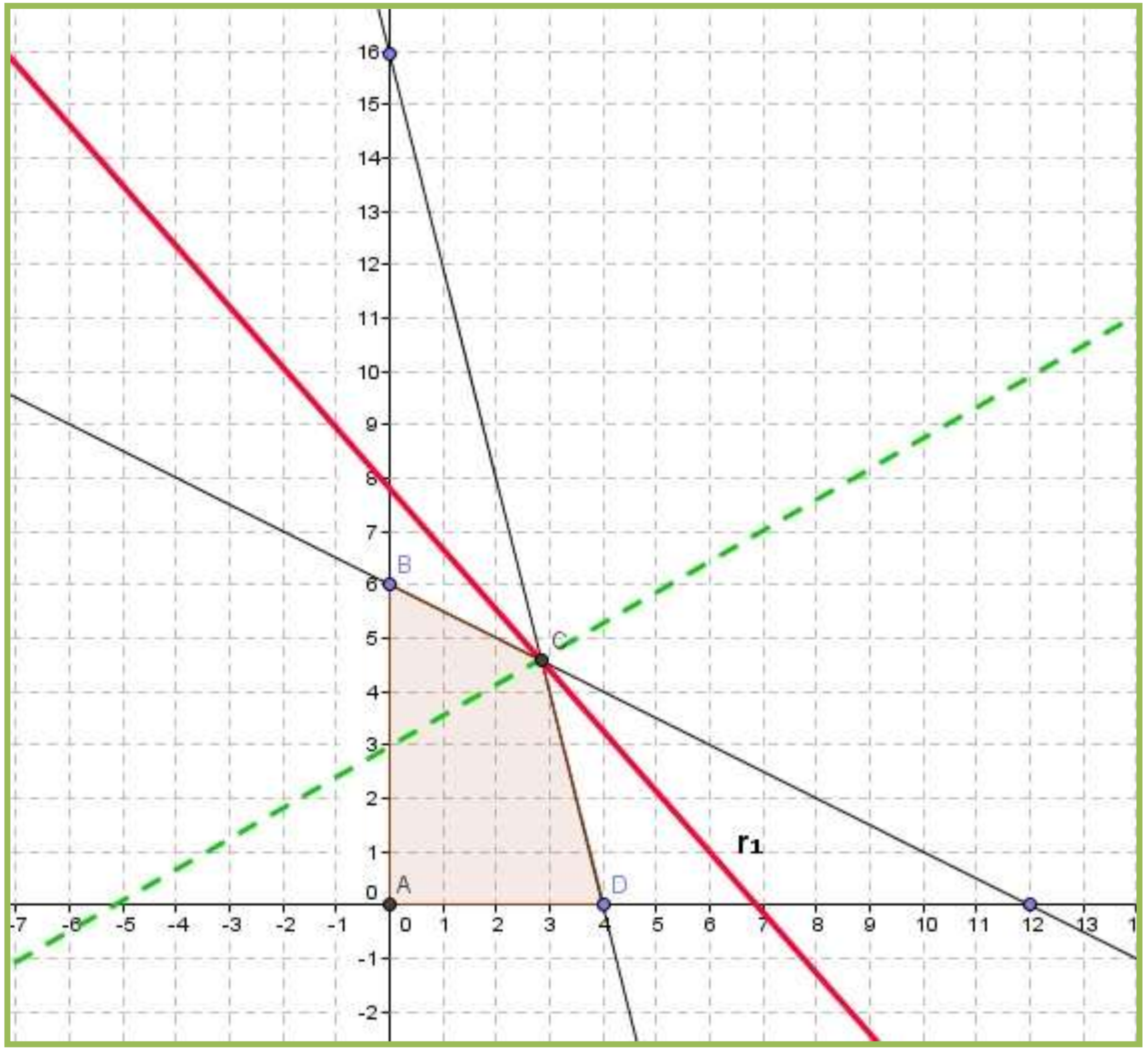
***a)*** Si las condiciones a las cuales está sujeta la función objetivo está dada por:

$$\begin{cases} 4x + y \le 16 \\ x + 2y \le 12 \end{cases} \qquad \text{Con } x \ge 0 ;\ y \ge 0$$

La condición para que la función objetivo $Z = ax + by$, alcance un máximo en algún vértice de la región es que la pendiente de las recta que se proponga no sea ni $-4$, ni $-1/2$ para la respuesta ***a)*** para que la recta ***ax+by=k*** no sea paralela a la recta determinada por los vértices B y C ni C y D

***b)*** para que la función objetivo se optimice en un lado del polígono de la región de soluciones factibles debes tomar una recta que tenga pendiente $-4$ o $-1/2$. Observar la región de soluciones factibles, para que la función se optimice en uno de los lados, la recta que representa a la función objetivo debe tener la misma pendiente que la recta que pasa por los puntos ***B*** y ***C*** (pendiente $-1/2$) o los puntos ***C*** y ***D*** (pendiente $-4$)






La recta $r_1$ (roja) pasa por un vértice y deja a toda la región debajo de ella por lo tanto la Función objetivo se maximiza en ese vértice
Determinar entonces los coeficientes de esa recta y esa es un ejemplo de función objetivo válida como respuesta.

Mientras que la recta $r_2$ (verde) si bien pasa por el vértice NO maximiza a la función objetivo ya que la región no está totalmente por debajo de ella.

Entonces, las respuestas son:

***a)*** **Maximizar $Z = x + 6y$ o cualquier otra con pendiente distinta de –4 y distinta de –1/2.**

***b)*** **Maximizar $Z = 20x + 5y$ o cualquier otra con pendiente igual a – 4 ó igual a –1/2**