UNIDAD TEMÁTICA 4
ESPACIO VECTORIAL

1) ***a)*** Investigar si $(\mathbf{V};+;\Re;\ .\ )$ es un subespacio vectorial de $(\Re^2;+;\Re;.)$ con las operaciones usuales definidas en $\Re^2$, siendo $V=\left\{(x;y)\in\Re^2 / y=2x\right\}$

b) Completar y tachar lo que no corresponde:
Observar que este conjunto está representado por la recta...................., que **SI / NO** pasa por el origen. Representar gráficamente.

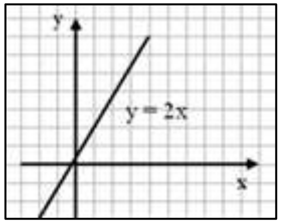
a) Para que $(\mathbf{V};+;\Re;\ .\ )$ sea un subespacio vectorial de que $(\Re^2;+;\Re;.)$ se deben cumplir las cuatro condiciones enunciadas en la teoría:

1) ¿ $V\neq\varnothing$? Si, porque $(0;0)\in V$. (Los elementos de V son del tipo $(x;2x)$ y $(0;0)=(0;2.0)$)

2) ¿ $V\subset\Re^2$**?** Si, por definición de V

3) ¿ $\vec{u}\in V\wedge\vec{v}\in V\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}\in V$?
$\vec{u}\in V\rightarrow\vec{u}=(x_1;2x_1)$ y $\vec{v}\in V\rightarrow\vec{v}=(x_2;2x_2)$ entonces $\vec{u}+\vec{v}=(x_1;2x_1)+(x_2;2x_2)=(x_1+x_2;2x_1+2x_2)=(x_1+x_2;2(x_1+x_2))$
Se cumple esta condición, porque en el vector suma, la segunda componente es el doble de la primera.

4) ¿$\alpha\in\Re\wedge\vec{v}\in V\Rightarrow\alpha.\vec{v}\in V$?
$\alpha.\vec{v}=\alpha.(x;2x)=(\alpha.x;\alpha.2x)=(\alpha x;2\alpha x)$. Se cumple también esta condición.
Por lo tanto, $(\mathbf{V};+;\Re;\ .\ )$ es un subespacio de $(\Re^2;+;\Re;.)$



b) Ese conjunto está representado por la recta $y=2x$, que **SI** pasa por el origen.

2) ***a)*** Investigar si $(\mathbf{W};+;\Re;\,.\,)$ es un subespacio vectorial de $(\Re^2;+;\Re;.)$ con las operaciones usuales definidas en $\Re^2$, siendo $W=\{(x;y)\in\Re^2\ /\ y=mx+b\wedge b\neq 0\}$

b) Completar y tache lo que no corresponde:
Observar que este conjunto está representado por la recta......................., que **SI/NO** pasa por el origen. Represente gráficamente.

a) **1)** ¿$W\neq\varnothing$? , Si porque $(0;b)\in W$

2) ¿$W\subset\Re^2$?, Si por definición de W

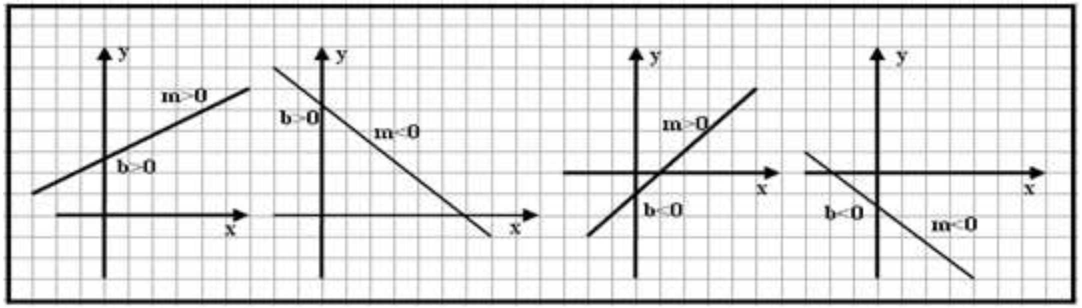
3) ¿ $\vec{u}\in W\wedge\vec{v}\in W\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}\in W$? Esta condición no se cumple, porque si consideramos por ejemplo:

$\vec{u}\in W\rightarrow\vec{u}=(x_1;mx_1+b)$ y $\vec{v}\in W\rightarrow\vec{v}=(x_2;mx_2+b)$ entonces

$\vec{u}+\vec{v}=(x_1;\,mx_1+b)+(x_2;\,mx_2+b)=(x_1+x_2;\,mx_1+mx_2+2b)=(x_1+x_2;\,m(x_1+x_2)+2b)\neq(x_1+x_2;\,m(x_1+x_2)+b)$ este vector no pertenece a W

Como no se cumple la condición 3) $(\mathbf{W};+;\Re;\,.\,)$ no es un subespacio vectorial de $(\Re^2;+;\Re;.)$

b) El conjunto está representado por la recta: $y=mx+b$, que ***no*** pasa por el origen



3) Dado $W=\left\{ (x\,;y)\in\Re^2 \,/\, |\,x\,|+|\,y\,|=0 \right\}$. Indicar cual proposición es verdadera

a) W es un subespacio trivial de $\Re^2$ ***b)*** $(-3;3)\in W$ ***c)*** $W=\varnothing$ ***d)*** Ninguna de las anteriores

La respuesta correcta es la ***a)***, porque $W=\left\{ (x\,;y)\in\Re^2 \,/\, |\,x\,|+|\,y\,|=0 \right\}=\left\{ (0\,;0) \right\}$ luego W es un subespacio trivial por definición.

4) Indicar si cada uno de los siguientes conjuntos son subespacios del espacio correspondiente justificando la respuesta.

i) $(\Re^2;+;\Re;.)$

a) $H=\left\{ (x;y)\in\Re^2 \,/\, x^2+y^2<0 \right\}=\varnothing$ H no cumple el primer axioma de las condiciones suficientes o sea $\boxed{\textbf{H no es subespacio}}$

b) $H=\left\{ (x;y)\in\Re^2 \,/\, |x+y|\geq 0 \right\}=\Re^2$ luego $\boxed{H \text{ es un subespacio trivial}}$ por definición.

c) $H=\left\{ (x;y)\in\Re^2 \,/\, 3x+y=0 \right\}=\left\{ (x;y)\in\Re^2 \,/\, y=-3x \right\}$

1) ¿ $H\neq\varnothing$? Si, porque $(0;0)\in H$. Los elementos de H son del tipo $(x;-3x)$ y $(0;0)=(0;-3.0)$

2) ¿ $H\subset\Re^2$**?** Si, por definición de H

3) ¿ $\vec{u}\in H\wedge\vec{v}\in H\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}\in H$?

$\vec{u}\in H\rightarrow\vec{u}=(x_1;-3x_1)$ y $\vec{v}\in H\rightarrow\vec{v}=(x_2;-3x_2)$ entonces

$\vec{u}+\vec{v}=(x_1;-3x_1)+(x_2;-3x_2)=(x_1+x_2;-3x_1-3x_2)=(x_1+x_2;-3(x_1+x_2))$

Se cumple esta condición, porque en el vector suma, la segunda componente es la opuesta del triple de la primera.

4) ¿ $\alpha\in\Re\wedge\vec{v}\in H\Rightarrow\alpha.\vec{v}\in H$?

$\alpha.\vec{v}=\alpha.(x;-3x)=(\alpha.x;\alpha.(-3x))=(\alpha x;-3\alpha x)$. Se cumple también esta condición.

Por lo tanto, $\boxed{(\mathbf{H};+;\Re;\,.\,) \text{ es un subespacio de } (\Re^2;+;\Re;.)}$

d) $H=\left\{ (x;y)\in\Re^2 \,/\, x+y-2=0 \right\}$ $\boxed{\textbf{H no es subespacio}}$, porque el vector nulo $(0\,;0)\notin H$

ii) $\left(\Re^3;+;\Re;.\right)$

a) $H=\left\{(x;y;z)\in\Re^3 \,/\, x=3y \;\wedge\; z=-y\right\}$

1) $H\neq\varnothing$? Si , $(3;1;-1)\in H$ Nos preguntamos si ¿el $\vec{0}\in H$? Si

2) $H\subset\Re^3$? Si, por definición de H

3) $\forall\ \vec{u}\in H, \forall\vec{v}\in H: \vec{u}+\vec{v}\in H$

$\vec{u}\in H\Rightarrow\vec{u}=(x_1;y_1;z_1)\in H\Rightarrow x_1=3y_1\wedge z_1=-y_1 \therefore \vec{u}=(3y_1;y_1;-y_1)$

$\vec{v}\in H\Rightarrow\vec{v}=(x_2;y_2;z_2)\in H\Rightarrow x_2=3y_2\wedge z_2=-y_2 \therefore \vec{v}=(3y_2;y_2;-y_2)$

$\vec{u}+\vec{v}=(3y_1;y_1;-y_1)+(3y_2;y_2;-y_2)=(3y_1+3y_2;y_1+y_2;-y_1-y_2)=(\,3.(y_1+y_2);\,y_1+y_2;-(y_1+y_2)\,)\in H$

4) $\forall\ \alpha\in\Re, \forall\vec{u}\in H: \alpha.\vec{u}\in H$

$\vec{u}\in H\Rightarrow\vec{u}=(x_1;y_1;z_1)\in H\Rightarrow x_1=3y_1\wedge z_1=-y_1 \therefore \vec{u}=(3y_1;y_1;-y_1)$

$\alpha.\vec{u}=\alpha.(3y_1;y_1;-y_1)=(3\alpha y_1;\alpha y_1;-\alpha y_1)\in H$

$\therefore$ $\boxed{H \text{ es subespacio de } \Re^3}$

b) $H=\left\{(x;y;z)\in\Re^3 \,/\, y=3\right\}$ **H** no es subespacio, porque el vector nulo $(0\,;0;0)\notin H$

c) $H=\left\{(x;y;z)\in\Re^3 \,/\, x+y-3=2z\right\}$ **H** no es subespacio, porque el vector nulo $(0\,;0;0)\notin H$

d) $H=\left\{(x;y;z)\in\Re^3 / z=3x+y\right\}$

1) $H\neq\ \varnothing$? *Si*, $(1;2;5)\in H$ *porque* $5=\ 3.1+2$. Nos preguntamos *¿el* $\vec{0}\in H$? *Si*

2) $H\subset\Re^3$? *Si, por definición de H*

3) $\forall\ \vec{u}\in H,\forall\ \vec{v}\in H:\vec{u}+\vec{v}\in H$

$\vec{u}\in H\Rightarrow\vec{u}=(x_1;y_1;z_1)\in H\Rightarrow z_1=3x_1+y_1\ \therefore\ \vec{u}=(x_1;y_1;3x_1+y_1)$

$\vec{v}\in H\Rightarrow\vec{v}=(x_2;y_2;z_2)\in H\Rightarrow z_2=3x_2+y_2\ \therefore\vec{v}=(x_2;y_2;3x_2+y_2)$

$\vec{u}+\vec{v}=(x_1;y_1;3x_1+y_1)+(x_2;y_2;3x_2+y_2)=(x_1+x_2;y_1+y_2;3x_1+y_1+3x_2+y_2)=(x_1+x_2;y_1+y_2;3(x_1+x_2)+(y_1+y_2))\in H$

4) $\forall\ \alpha\in\Re,\forall\vec{u}\in H:\alpha.\vec{u}\in H$

$\vec{u}\in H\Rightarrow\vec{u}=(x_1;y_1;z_1)\in H\Rightarrow z_1=3x_1+y_1\ \therefore\ \vec{u}=(x_1;y_1;3x_1+y_1)$

$\alpha.\vec{u}=\alpha.(x_1;y_1;3x_1+y_1)=(\alpha x_1;\alpha y_1;\alpha(3x_1+y_1))=(\alpha x_1;\alpha y_1;3\alpha x_1+\alpha y_1)\in H$

$\therefore\ \boxed{H\ \textit{es subespacio de}\ \Re^3}$

iii) $\left(\Re^{2x2};+;\Re;.\right)$

a) $H_1=\left\{A\in\Re^{2x2}\ /\ A\ \text{es escalar}\right\}=\left\{A\in\Re^{2x2}\ /\ a_{11}=a_{22}=a\wedge a_{12}=a_{21}=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}/\ a\in\Re\right\}$

1) $H_1\neq\varnothing$. Porque $N=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in H_1$

2) $H_1\subset\Re^{2x2}$, por definición

3) $\forall A\in H_1\wedge\forall B\in H_1\rightarrow(A+B)\in H_1$

$A\in H_1\rightarrow A=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}\wedge B\in H_1\rightarrow B=\begin{pmatrix}b&0\\0&b\end{pmatrix}$ luego $A+B=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&0\\0&a+b\end{pmatrix}\in H_1$ $\quad\therefore\ \boxed{H_1\ \text{es subespacio de}\ \Re^{2x2}}$

4) $\forall\alpha\in\Re\wedge\forall A\in H_1\rightarrow\alpha A\in H_1$ $\quad$ luego $\alpha\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha.a&a.0\\\alpha.0&\alpha.a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha.a&0\\0&\alpha.a\end{pmatrix}\in H_1$

b) $H_2 = \left\{ A \in \Re^{2x2} \ / \ A \text{ es antisimétrica} \right\} = \left\{ A \in \Re^{2x2} \ / \ a_{11} = a_{22} = 0 \wedge a_{12} = -a_{21} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} / \ a \in \Re \right\}$

1) $H_2 \neq \varnothing$. Porque N=$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H_1$

2) $H_2 \subset \Re^{2x2}$, por definición

3) $\forall A \in H_2 \wedge \forall B \in H_2 \rightarrow (A+B) \in H_2$

$A \in H_2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \wedge B \in H_2 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ luego $A + B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ -(a+b) & 0 \end{pmatrix} \in H_2$

4) $\forall \alpha \in \Re \wedge \forall A \in H_2 \rightarrow \alpha A \in H_2$ luego $\alpha \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha.0 & \alpha.a \\ \alpha.(-a) & \alpha.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha.a \\ -\alpha.a & 0 \end{pmatrix} \in H_2 \therefore$ $\boxed{H_2 \text{ es subespacio de } \Re^{2x2}}$

c) $H_3 = \left\{ A \in \Re^{2x2} \ / \ A \text{ es ortogonal} \right\} = \left\{ A \in \Re^{2x2} \ / \ A^T = A^{-1} \right\}$ $\boxed{H_3 \text{ no es subespacio de } \Re^{2x2}}$ porque N=$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin H_3$. La matriz nula no es ortogonal

d) $H_4 = \left\{ A \in \Re^{2x2} \ / \ a_{11} = 2a_{12} \wedge a_{21} = -a_{22} \right\} = \left\{ A \in \Re^{2x2} \ / \begin{pmatrix} 2a & a \\ -b & b \end{pmatrix} \text{ con } a \in \Re, b \in \Re \right\}$

1) $H_4 \neq \varnothing$. *Porque* $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H_4$

2) $H_4 \subset \Re^{2x2}$, *por definición*

3) $\forall A \in H_4 \wedge \forall B \in H_4 \rightarrow (A+B) \in H_4$

$A \in H_4 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2a & a \\ -b & b \end{pmatrix} \wedge B \in H_4 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 2c & c \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ *luego* $A + B = \begin{pmatrix} 2a & a \\ -b & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c & c \\ -d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a+c) & a+c \\ -(b+d) & b+d \end{pmatrix} \in H_4$

4) $\forall \alpha \in \Re \wedge \forall A \in H_4 \rightarrow \alpha A \in H_4$ *luego* $\alpha \begin{pmatrix} 2a & a \\ -b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(2a) & \alpha a \\ \alpha(-b) & \alpha b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha a & \alpha a \\ -\alpha b & \alpha b \end{pmatrix} \in H_4 \therefore$ $\boxed{H_4 \text{ es subespacio de } \Re^{2x2}}$

e) $H_5=\left\{A\in\Re^{2x2}\,/\,a_{11}=4\wedge\; a_{22}=a_{12}+a_{21}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}4 & a\\ b & a+b\end{pmatrix}/\,a\in\Re,\, b\in\Re\right\}$ $\boxed{H_5 \text{ no es subespacio de } \Re^{2x2}}$ porque $\mathbf{N}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\notin H_5$

iv) $\left(\Re^4;+;\Re;.\right)$

a) $W_1=\left\{\left(x;y;z;w\right)\in\Re^4\,/\,x+y+z=0\right\}=\left\{\left(x;y;z;w\right)\in\Re^4\,/\,z=-x-y\right\}=\left\{\left(x;y;-x-y;w\right)/\,x\in\Re, y\in\Re, w\in\Re\right\}$

$1)W_1\neq\varnothing$ *porque* $(0;0;0;0)\in W_1$

$2)W_1\subset\Re^4$ *por definición*

$3)\forall\,\vec{u}\in W_1\wedge\forall\vec{v}\in W_1\rightarrow(\vec{u}+\vec{v})\in W_1$

$\vec{u}\in W_1\rightarrow\vec{u}=(x_1;y_1;-x_1-y_1;w_1)\wedge\vec{v}\in W_1\rightarrow\vec{v}=(x_2;y_2;-x_2-y_2;w_2)$

luego $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2;y_1+y_2;-x_1-y_1-x_2-y_2;w_1+w_2)=(x_1+x_2;y_1+y_2;-(x_1+x_2)-(y_1+y_2);w_1+w_2)\in W_1$

$4)\forall\alpha\in\Re\wedge\forall\vec{u}\in W_1\rightarrow\alpha\vec{u}\in W_1$

luego $\alpha\vec{u}=\alpha.(x;y;-x-y;w)=(\alpha x;\alpha y;-\alpha x-\alpha y;\alpha w)\in W_1$

$\therefore$ $\boxed{W_1 \text{ es un subespacio de } \Re^4}$

b) $W_2=\left\{\left(x;y;z;w\right)\in\Re^4\,/\,x=y+z\wedge w=0\right\}=\left\{\left(y+z;y;z;0\right)/\,y\in\Re, z\in\Re\right\}$

$1)W_2\neq\varnothing$ *porque* $(0;0;0;0)\in W_1$

$2)W_2\subset\Re^4$ *por definición*

$3)\forall\vec{u}\in W_2\wedge\forall\vec{v}\in W_2\rightarrow(\vec{u}+\vec{v})\in W_2$

$\vec{u}\in W_2\rightarrow\vec{u}=(y_1+z_1;y_1;z_1;0)\;\wedge\;\vec{v}\in W_2\rightarrow\vec{v}=(y_2+z_2;y_2;z_2;0)$

luego $\vec{u}+\vec{v}=(y_1+z_1+y_2+z_2;y_1+y_2;z_1+z_2;0)=((y_1+y_2)+(z_1+z_2);y_1+y_2;z_1+z_2;0)\in W_2$

$4)\forall\alpha\in\Re\wedge\forall\vec{u}\in W_2\rightarrow\alpha\vec{u}\in W_2$

luego $\alpha\vec{u}=\alpha.(y+z;y;z;0)=(\alpha y+\alpha z;\alpha y;\alpha z;0)\in W_1$

$\therefore$ $\boxed{W_2 \text{ es un subespacio de } \Re^4}$

c) $W_3 = \{(x;y;z;w) \in \Re^4 \,/\, x = 0\}$

1) $W_3 \neq \varnothing$ *porque* $(0;0;0;0) \in W_1$

2) $W_3 \subset \Re^4$ *por definición*

3) $\forall \vec{u} \in W_3 \wedge \forall \vec{v} \in W_3 \rightarrow (\vec{u}+\vec{v}) \in W_3$

$\vec{u} \in W_3 \rightarrow \vec{u} = (0;y_1;z_1;w_1) \wedge \vec{v} \in W_3 \rightarrow \vec{v} = (0;y_2;z_2;w_2)$ *luego* $\vec{u}+\vec{v} = (0;y_1+y_2;z_1+z_2;w_1+w_2) \in W_3$

4) $\forall \alpha \in \Re \wedge \forall \vec{u} \in W_3 \rightarrow \alpha\vec{u} \in W_3$

luego $\alpha\vec{u} = \alpha.(0;y;z;w) = (0;\alpha y;\alpha z;\alpha w) \in W_3 \quad \therefore \boxed{W_3 \text{ es un subespacio de } \Re^4}$

5) Verificar que el conjunto solución del sistema:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$ no es un subespacio de $(\Re^3;+;\Re;\,.)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)_{(-1)F_2} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & (1) & 0 & -4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 8 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$S = \{(x_1;x_2;x_3) \in \Re^3 \,/\, x_2 = -4 \wedge x_1 - x_3 = 8\} \therefore$ **S** ***no es un subespacio de*** $(\Re^3, +, \Re, .)$ ***porque*** $(0;0;0) \notin S$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$ es un subespacio de $(\Re^3;+;\Re;\,.)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \end{array}\right)_{-\frac{1}{5}F_2} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & (1) & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)_{\frac{1}{4}F_3} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$S = \{(0;0;0)\}$ ***es un subespacio trivial o sea S es un subespacio de*** $(\Re^3,+,\Re,.)$

6) Sean $\vec{v}_1 = (1;-3;\ 2)$ y $\vec{v}_2 = (2;-1;\ 1)$ pertenecientes a $\Re^3$

a) Escribir, si es posible, $\vec{v} = (4\ ;3\ ;-1)$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

$$\alpha(1;-3;2)+\beta(2;-1;1)=(4;3;-1)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} (1) & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \approx_{F_2 \cdot \frac{1}{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & (1) & 3 \\ 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \alpha=-2 \wedge \beta=3 \Rightarrow (4;3;-1)=(-2)(1;-3;2)+3(2;-1;1)$$

b) ¿Es posible expresar $\vec{u} = (2\ ;1\ ;-3)$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$?

$$\alpha(1;-3;2)+\beta(2;-1;1)=(2;1;-3)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} (1) & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & -7 \end{array}\right) \approx_{F_2 \cdot \frac{1}{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & (1) & 7/5 \\ 0 & -3 & -7 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 7/5 \\ 0 & 0 & -14/5 \end{array}\right)$$

Sistema incompatible, $(2;1;-3)$ no se puede expresar como combinación lineal de $(1;-3;2)$ y $(2;-1;1)$

c) ¿Para qué valor de $k \in \Re$ **es** $(1\ ;12;\ k)$ una combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$?

$$\alpha(1;-3;2)+\beta(2;-1;1)=(1;12;\ k)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} (1) & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 12 \\ 2 & 1 & k \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & -3 & k-2 \end{array}\right) \approx_{F_2 \cdot \frac{1}{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & (1) & 3 \\ 0 & -3 & k-2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & k+7 \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible y $(1;12;\ k)$ sea combinación lineal de los vectores dados $\Rightarrow k+7=0 \Rightarrow \boxed{k=-7}$

d) Indicar qué condición deben cumplir los números reales ***a, b*** y ***c***, para que el vector $(a;b;c)$ sea una combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

$$\alpha(1;-3;2)+\beta(2;-1;1)=(a;b;c)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} (1) & 2 & a \\ -3 & -1 & b \\ 2 & 1 & c \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 5 & b+3a \\ 0 & -3 & c-2a \end{array}\right) \approx_{F_2\cdot\frac{1}{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & (1) & \frac{b+3a}{5} \\ 0 & -3 & c-2a \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-a-2b}{5} \\ 0 & 1 & \frac{b+3a}{5} \\ 0 & 0 & \frac{-a+3b+5c}{5} \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible y $(a;\ b;\ c)$ sea CL de los vectores dados debe $\frac{-a+3b+5c}{5}=0$

$$\boxed{-a+3b+5c=0}$$

7) Hallar k para que $\vec{v}=(k;1;\ 1)$ resulte combinación lineal de $\vec{u}=(0;2;1)$ y $\vec{w}=(1;-1;0)$

$$\alpha(0;2;1)+\beta(1;-1;0)=(k;1;1)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & (1) & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & k \\ 2 & 0 & 1+k \\ (1) & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & k-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible y $(k;\ 1;\ 1)$ sea CL de los vectores dados

$$\Rightarrow k-1=0 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

8) Determinar si el conjunto dado de vectores es **L.D**. o **L.I**

a) En $(\Re^3;+;\Re;.)$, $A=\{(3;1;1)\ ,\ (2;-1;5)\ ,\ (4;0;-3)\}$

$$\alpha(3;1;1)+\beta(2;-1;5)+\gamma(4;0;-3)=(0;0;0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 0 \\ (1) & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right)_{(-\frac{1}{3})F_3} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & (1) & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 13 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)^{\frac{1}{13}F_1} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & (1) & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A')=3=$ nº de incógnitas $\Rightarrow SCD \Rightarrow S=\{(0;0;0)\} \Rightarrow$ la familia de vectores A es linealmente independiente

b) En $\left(\Re^{2x2};+;\Re;.\right)$, $B=\left\{\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right\}$

$$\alpha\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}4\alpha & -2\alpha\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\beta & \beta\\ 0 & \beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\alpha-2\beta & -2\alpha+\beta\\ 0 & \alpha+\beta-2\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}4\alpha-2\beta & =0\\ -2\alpha+\beta & =0\\ & 0=0\\ \alpha+\beta-2\gamma & =0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}4\alpha-2\beta & =0\\ -2\alpha+\beta & =0\\ \alpha+\beta-2\gamma & =0\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ (1) & 1 & -2 & 0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -6 & 8 & 0\\ 0 & 3 & -4 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)_{(\frac{1}{3})F_2}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -6 & 8 & 0\\ 0 & (1) & -\frac{4}{3} & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -4/3 & 0\\ 1 & 0 & -2/3 & 0\end{array}\right)$$

$\boldsymbol{r(A)=r(A')=2<3\ \Rightarrow}$

$\boldsymbol{SCI\Rightarrow}$ la familia $\boldsymbol{B}$ es LD

c) En $\left(\Re^{2x3};+;\Re;.\right)$, $C=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta=0\\ 2\alpha+\ \ \gamma=0\\ 3\alpha+4\beta=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0\end{array}\right)\quad\text{ya que}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0\Rightarrow SCD\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0\therefore C\text{ es }\mathbf{LI}$$

d) En $\left(\Re^2;+;\Re;.\right)$, $E=\{(1;1),(2;2)\}$

$$\alpha(1;1)+\beta(2;2)=(0;0)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}(1) & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow r(A)=r(A')=1<2\Rightarrow SCI\Rightarrow \text{La familia } E \text{ es LD}$$

9) Determinar la o las condiciones que deben satisfacer los números **a, b, c y d** a fin de que los vectores $(a;b)$ *y* $(c;d)$ del espacio $(\Re^2,+,\Re,\ .)$ sean **LI**.

Para que un conjunto de vectores sea linealmente independiente el sistema homogéneo que resulta de plantear la combinación lineal $\alpha_1(a;b)+\alpha_2(c;d)=(0;0)$ $\begin{cases}\alpha_1.a+\alpha_2.c=0\\ \alpha_1.b+\alpha_2.d=0\end{cases}$ El sistema homogéneo que resulta de plantear la combinación lineal debe ser compatible determinado, luego $\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}\neq 0$. En consecuencia $ad-bc\neq 0$ o bien $ad\neq bc$

10) Analizar y decidir justificando si los siguientes pares de vectores son **LI** o **LD**.

a) $(1;1)$, $(2;7)$ **LI ambos distintos del vector nulo y no son CL entre si**

b) $(2;\ 4;\ 1)$, $(8;\ 16;\ 4)$ **LD porque (8; 16; 4) =4 (2; 4; 1)**

c) $(5;\ 5;10;\ 0;\ 5)$,$(1;\ 1;\ 2;\ 0;\ 1))$ **LD porque** $(5;\ 5;10;\ 0;\ 5)=5.(1;\ 1;\ 2;\ 0;\ 1)$

d) $(0;\ 0;\ 0)$, $(-5;\ 7\ ;18)$ **LD porque el vector nulo es LD**

11) Hallar todos los $\mathbf{c} \in \Re$ para que $A=\{(1-c;1+c),(1+c;1-c)\}$ sea linealmente independiente.

Planteando la CL que da por resultado el vector nulo:

$$\alpha(1-c\,;1+c)+\beta(1+c\,;1-c)=(0;0) \quad\rightarrow\quad (\alpha(1-c);\ \alpha(1+c))+(\beta(1+c);\ \beta(1-c))=(0;0) \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad (\alpha(1-c)+\beta(1+c);\ \alpha(1+c)+\beta(1-c))=(0;0) \quad\therefore\quad \begin{cases}\alpha(1-c)+\beta(1+c)=0\\ \alpha(1+c)+\beta(1-c)=0\end{cases}$$

Para que los vectores de *A* sean LI, los escalares deben ser 0. (Para que la única combinación lineal que da el vector nulo, sea la trivial).
Entonces el sistema deberá ser SCD y entonces el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser distinto de 0. O sea:

$$\begin{vmatrix}1-c & 1+c\\ 1+c & 1-c\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow(1-c)(1-c)-(1+c)(1+c)\neq 0\rightarrow(1-c)^2-(1+c)^2\neq 0\rightarrow\cancel{1}-2c+\cancel{c^2}\cancel{-1}-2c\cancel{-c^2}\neq 0\rightarrow -4c\neq 0\rightarrow\boxed{c\neq 0}$$

12) Determinar si el conjunto de vectores dado genera en cada caso el espacio vectorial indicado. En caso negativo, halle el subespacio generado.

i) $(\Re^2;+;\Re;.)$

a) $A_1=\{(1;2),(3;4)\}$

$$\alpha(1;2)+\beta(3;4)=(x;y)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}(1)&3&x\\2&4&y\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&3&x\\0&-2&y-2x\end{array}\right)_{-\frac{1}{2}F_2}\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&3&x\\0&(1)&\dfrac{-y+2x}{2}\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&0&\dfrac{3y-4x}{2}\\0&1&\dfrac{-y+2x}{2}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$r(A)=r(A')=2=n°incog\Rightarrow SCD$$

$$\boxed{A_1\ genera\ \Re^2}$$

b) $A_2=\{(1;1),(2;2),(5;5)\}$

$$\alpha(1;1)+\beta(2;2)+\gamma(5;5)=(x;y)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}(1)&2&5&x\\1&2&5&y\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&5&x\\0&0&0&y-x\end{array}\right)\Rightarrow$$

Para que el sistema tenga solución deberá ser : $y-x=0$
El conjunto no genera todo $\Re^2$

$$\therefore \boxed{A_2 \text{ genera un subespacio propio}: \overline{A_2}=\{(x;y)\in\Re^2 / y-x=0\}=\{(x;y)\in\Re^2 / y=x\} \text{ o sea } \overline{A_2}=\{(a;a) \text{ con } a\in\Re\}}$$

c) $A_3=\{(1;1),(2;1),(2;2)\}$

$$\alpha(1;1)+\beta(2;1)+\gamma(2;2)=(x;y)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}(1)&2&2&x\\1&1&2&y\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&x\\0&-1&0&y-x\end{array}\right)_{-F_2}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&x\\0&(1)&0&-y+x\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-x+2y\\0&1&0&-y+x\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\quad r(A)=r(A')=2<3=n°incog\Rightarrow SCI \quad pero \quad \boxed{A_3 \text{ genera } \Re^2}$$

ii) $(\Re^3;+;\Re;.)$

a) $B_1=\{(1;1;1),(0;1;1),(0;0;1)\}$

$$\alpha(1;1;1)+\beta(0;1;1)+\gamma(0;0;1)=(x;y;z)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}(1)&0&0&x\\1&1&0&y\\1&1&1&z\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&x\\0&(1)&0&y-x\\0&1&1&z-x\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&x\\0&1&0&y-x\\0&0&(1)&z-y\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&x\\0&1&0&y-x\\0&0&1&z-y\end{array}\right)$$

$r(A)=r(A')=3=n°incog\Rightarrow SCD \quad \therefore \quad B_1$ *genera* $\Re^3$

b) $B_2=\{(1;2;3),(-1;2;3),(5;2;3)\}$

$$\alpha(1;2;3)+\beta(-1;2;3)+\gamma(5;2;3)=(x;y;z)\to\left(\begin{array}{ccc|c}(1)&-1&5&x\\2&2&2&y\\3&3&3&z\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&5&x\\0&4&-8&y-2x\\0&6&-12&z-3x\end{array}\right)\tfrac{1}{6}F_3\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&5&x\\0&4&-8&y-2x\\0&(1)&-2&z-3x/6\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&3x+z/2\\0&0&0&3y-2z/3\\0&1&-2&z-3x/6\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ *Para que el sistema tenga solución deberá ser* $:3y-2z/3=0\Rightarrow 3y-2z=0$, *el conjunto no genera todo* $\Re^3$

$\therefore$ $\boxed{B_2 \text{ genera un subespacio propio}: \overline{B_2}=\{(x;y;z)\in\Re^3 / 3y-2z=0\}}$

c) $B_3=\{(2;0;1),(3;1;2),(1;1,;1),(7;3;5)\}$

$$\alpha(2;0;1)+\beta(3;1;2)+\gamma(1;1;1)+\partial(7;3;5)=(x;y;z)\to\left(\begin{array}{cccc|c}2&3&1&7&x\\0&1&1&3&y\\(1)&2&1&5&z\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}0&-1&-1&-3&x-2z\\0&(1)&1&3&y\\1&2&1&5&z\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&0&0&x+y-2z\\0&1&1&3&y\\1&0&-1&-1&z-2y\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ *Para que el sistema tenga solución deberá ser* $:x+y-2z=0\Rightarrow$, *el conjunto no genera todo* $\Re^3$

$\therefore$ $\boxed{B_2 \text{ genera un subespacio propio}: \overline{B_2}=\{(x;y;z)\in\Re^3 / x+y-2z=0\} \text{ o sea } \overline{B_2}=\{(x;y;z)\in\Re^3 / x=-y+2z\}}$

iii) $(\Re^{2x2};+;\Re;.)$

a) $C_1=\left\{\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\3&1\end{pmatrix}\right\}$

$$\alpha\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&0\\2&1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3&-1\\0&0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0&0\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&0&3&0&x\\\boxed{1}&0&-1&0&y\\0&2&0&3&z\\0&1&0&1&t\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&5&0&x-2y\\1&0&-1&0&y\\0&2&0&3&z\\0&\boxed{1}&0&1&t\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&5&0&x-2y\\1&0&-1&0&y\\0&0&0&\boxed{1}&z-2t\\0&1&0&1&t\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&5&0&x-2y\\1&0&-1&0&y\\0&0&0&1&z-2t\\0&1&0&0&3t-z\end{array}\right)\tfrac{1}{5}F_1\approx\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&\boxed{1}&0&x-2y/5\\1&0&-1&0&y\\0&0&0&1&z-2t\\0&1&0&0&3t-z\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&1&0&x-2y/5\\1&0&0&0&3y+x/5\\0&0&0&1&z-2t\\0&1&0&0&3t-z\end{array}\right)$$

$r(A)=r(A')=4=$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ SCD $\Rightarrow$ el conjunto genera $\Re^{2x2}$

b) $C_2=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&-1\\3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&5\\6&0\end{pmatrix}\right\}$

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}4&-1\\3&0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}-2&5\\6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\alpha+\beta+4\gamma-2\delta&2\beta-\gamma+5\delta\\\alpha+3\gamma+6\delta&0\alpha+0\beta+0\gamma+0\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c}(1)&1&4&-2&x\\0&2&-1&5&y\\1&0&3&6&z\\0&0&0&0&w\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&4&-2&x\\0&2&-1&5&y\\0&-1&-1&8&z-x\\0&0&0&0&w\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&4&-2&x\\0&-2&(1)&-5&-y\\0&-1&-1&8&z-x\\0&0&0&0&w\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1&9&0&18&x+4y\\0&-2&1&-5&-y\\0&-3&0&3&z-x+y\\0&0&0&0&w\end{array}\right)\frac{1}{3}F_3\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1&9&0&18&x+4y\\0&-2&1&-5&-y\\0&-1&0&(1)&(z-x+y)/3\\0&0&0&0&w\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1&27&0&0&x+4y-6(z-x+y)\\0&-7&1&0&-y+5/3(z-x+y)\\0&-1&0&1&(z-x+y)/3\\0&0&0&0&w\end{array}\right)$$

Para que el sistema tenga solución $w=0\therefore C_2$ ***genera un subespacio propio***

$$\overline{C_2}=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\in\Re^{2x2}\ /\ w=0\right\}\ \textit{o sea}\ \overline{C_2}=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&0\end{pmatrix}\ /\ x,y,z\in\Re\right\}$$

13) Hallar todos los valores de $k\in\Re$, para que el vector $\vec{u}=(3;k-3;2k)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores de $A=\{(2;0;4),(1;0;2)\}$.

$$\alpha(2;0;4)+\beta(1;0;2)=(3;k-3;2k)$$

$$\left(\begin{array}{cc:c}2&(1)&3\\0&0&k-3\\4&2&2k\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc:c}2&1&3\\0&0&k-3\\0&0&2k-6\end{array}\right)$$ Para que el sistema sea compatible $k-3=0$ o sea $\boxed{k=3}$

14) Analizar si el vector $\vec{g} = (2;14;-34;7)$ pertenece al subespacio de $\Re^4$ generado por los vectores $\vec{v}_1 = (1;4;-5;2)$ y $\vec{v}_2 = (1;2;3;1)$.

Hallamos el subespacio generado por los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

$$\alpha(1;4;-5;2) + \beta(1;2;3;1) = (a;b;c;d)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & a \\ 4 & 2 & b \\ -5 & 3 & c \\ 2 & 1 & d \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & b-4a \\ 0 & 8 & c+5a \\ 0 & -1 & d-2a \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & b-4a \\ 0 & 8 & c+5a \\ 0 & \boxed{1} & -d+2a \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a+d-2a \\ 0 & 0 & b-4a+2(-d+2a) \\ 0 & 0 & c+5a-8(-d+2a) \\ 0 & 1 & -d+2a \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -a+d \\ 0 & 0 & b-2d \\ 0 & 0 & c-11a+8d \\ 0 & 1 & -d+2a \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} b - 2d = 0 \\ -11a + c + 8d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2d \\ c = 11a - 8d \end{cases}$$

$$\bar{A} = \{(a;b;c;d) \,/\, b = 2d \wedge c = 11a - 8d\}$$

Si ahora tomas el vector $\vec{g}$ **v**erás que cumple con esta condición del subespacio que generaron los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

El otro método:

$$\alpha(1;4;-5;2) + \beta(1;2;3;1) = (2;14;-34;7)$$

Resolviendo $\alpha = 5$ y $\beta = -3$

O sea $5(1;4;-5;2) + (-3)(1;2;3;1) = (2;14;-34;7)$

15) Verificar que el conjunto $B=\{(1;1;1),(1;1;0),(1;0;0)\}$ es una base de $(\Re^3;+;\Re;.)$ Expresar el vector **(a; b; c)** como combinación lineal de vectores de esa base.

$$\alpha(1;1;1)+\beta(1;1;0)+\gamma(1;0;0)=(0;0;0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}(1)&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&0&-1&0\\0&-1&-1&0\end{array}\right)(-1)F_3\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&0&-1&0\\0&(1)&1&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&1&0\end{array}\right)(-1)F_1\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&0&(1)&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{array}\right)$$

$r(A)=r(A')=3=n^o$ *de incógnitas* $\Rightarrow SCD$

$\Rightarrow S=\{(0;0;0)\}\Rightarrow$ ***la familia de vectores B es linealmente independiente y por lo tanto son base de*** $\Re^3$ ***ya que tres vectores de*** $\Re^3$ ***linealmente independientes generan dicho espacio***

$$\alpha(1;1;1)+\beta(1;1;0)+\gamma(1;0;0)=(a;b;c)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}(1)&1&1&a\\1&1&0&b\\1&0&0&c\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&a\\0&0&-1&b-a\\0&-1&-1&c-a\end{array}\right)(-1)F_3\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&a\\0&0&-1&b-a\\0&(1)&1&a-c\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&c\\0&0&-1&b-a\\0&1&1&a-c\end{array}\right)(-1)F_1\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&c\\0&0&(1)&a-b\\0&1&1&a-c\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&c\\0&0&1&a-b\\0&1&0&-c+b\end{array}\right)$$

$$c(1;1;1)+(c-b)(1;1;0)+(a-b)(1;0;0)=(a;b;c)$$

$$(a;b;c)_{[B]}=\begin{bmatrix}c & -c+b & a-b\end{bmatrix}$$

16) Determine si el conjunto dado de vectores es una base del espacio vectorial indicado. En caso de no serlo, halle el subespacio generado, una base y su dimensión.

a) En $\Re^2$, el conjunto $\{(1;2),(1;0)\}$

$$\alpha(1;2) + \beta(1;0) = (0;0)$$

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right)\frac{1}{2}F_2 \approx \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0 \\ (1) & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A') = 2 = n^{o}$ **de incógnitas** $\Rightarrow$ **SCD** $\Rightarrow$ **el conjunto es LI**

$$\alpha(1;2) + \beta(1;0) = (x;y)$$

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \end{array}\right)\frac{1}{2}F_2 \approx \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & x \\ (1) & 0 & \frac{y}{2} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & x-\frac{y}{2} \\ 1 & 0 & \frac{y}{2} \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A') = 2 = n^{o}$ **de incógnitas** $\Rightarrow$ **SCD** $\Rightarrow$ **el conjunto genera** $\Re^2$

Luego el conjunto genera el conjunto $\Re^2$ **y ademas son LI por lo tanto son base de** $\Re^2$

b) En $\Re^3$, el conjunto $\{(1;2\,;-1),(1;0;2),(2;1;1)\}$

$\alpha(1;2;-1)+\beta(1;0;2)+\gamma(2;1;1)=(x;y;z)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}(1)&1&2&x\\2&0&1&y\\-1&2&1&z\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&x\\0&-2&-3&y-2x\\0&3&3&z+x\end{array}\right)_{\frac{1}{3}F_3}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&x\\0&-2&-3&y-2x\\0&(1)&1&\frac{z+x}{3}\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&\frac{2x-z}{3}\\0&0&-1&\frac{-4x+3y+2z}{3}\\0&1&1&\frac{z+x}{3}\end{array}\right)(-1)F_2\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&\frac{2x-z}{3}\\0&0&(1)&\frac{4x-3y-2z}{3}\\0&1&1&\frac{z+x}{3}\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{-2x+3y+z}{3}\\0&0&1&\frac{4x-3y-2z}{3}\\0&1&0&-x+y+z\end{array}\right)$$

$r(A)=r(A')=3=n^o$ de incógnitas $\Rightarrow$ SCD $\Rightarrow$ el conjunto genera $\Re^3$

Para que sean base deben ser LI

$\alpha(1;2;-1)\ +\beta(1;0;2)\ +\ \ \gamma(2;1;1)=(0;0;0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}(1)&1&2&0\\2&0&1&0\\-1&2&1&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&-2&-3&0\\0&3&3&0\end{array}\right)_{\frac{1}{3}F_3}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&-2&-3&0\\0&(1)&1&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&1&1&0\end{array}\right)(-1)F_2\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&0&(1)&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{array}\right)$$

$r(A)=r(A')=3=n^o$ de incógnitas $\Rightarrow$ SCD $\Rightarrow$ S $=\{(0;0;0)\}$ *los* vectores son LI luego $\boxed{\text{B}=\{(1;2;-1)\,,(1;0;2)\,,(2;1;1)\}\quad \text{la dimensión es 3}}$

c) En $\Re^3$, el conjunto $\{(1;0;2),(3;-1;4)\}$

$$\alpha(1;0;2)\ +\beta(3;-1;4)\ =(x;y;z)$$

$$\left(\begin{array}{cc:c} \boxed{1} & 3 & x \\ 0 & -1 & y \\ 2 & 4 & z \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & -2 & z-2x \end{array}\right)(-1)F_2 \approx \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & x \\ 0 & \boxed{1} & -y \\ 0 & -2 & z-2x \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & x+3y \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & z-2x-2y \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible $z-2x-2y=0$ no genera $\Re^3$ $\therefore$ $S=\{(x;y;z)\ /\ z=2x+2y\}$

$(x;y;z)=(x;y;2x+2y)=(x;0;2x)+(0;y;2y)=x(1;0;2)+y(0;1;2)$ **los vectores generan S y además son LI $\therefore$ $\boxed{\mathrm{B}=\{(1;0;2),(0;1;2)\}\ \text{la dimensión es 2}}$**

d) En $\Re^3$, el conjunto $\{(1\ ;\ 1\ ;1),(3\ ;\ 0\ ;\ 1),(-1\ ;\ 2\ ;\ 3),(0\ ;4\ ;\ 5)\}$

$\alpha_1.(1;1;1)+\alpha_2(3;0;1)+\alpha_3(-1;2;3)+\alpha_4.(0;4;5)=(a;b;c)$ **Efectuando operaciones, y por definición de igualdad de ternas, llegamos al sistema:**

$$\begin{cases} \alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3=a \\ \alpha_1+2\alpha_3+4\alpha_4=b \\ \alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3+5\alpha_4=c \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 2 & 4 & b \\ 1 & 1 & 3 & 5 & c \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & a \\ 0 & -3 & 3 & 4 & b-a \\ 0 & -2 & 4 & 5 & c-a \end{array}\right) F_2.-\frac{1}{3} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & a \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{b-a}{3} \\ 0 & -2 & 4 & 5 & c-a \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & 4 & b \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{b-a}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}b+c \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3.\frac{1}{2}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & 4 & b \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{b-a}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{6}a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3}a+\frac{5}{3}b-c \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}a-\frac{2}{3}b+\frac{1}{2}c \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{6}a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c \end{array}\right)$$

r(A) = r(A') = 3 < 4 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado, existen infinitos escalares, se da algo particular el número de vectores excede el número de componentes de los vectores pero los rangos coinciden con las componentes de modo que el conjunto de vectores genera $\Re^3$**.** El subespacio generado es $S=\Re^3$**,** su dimensión es 3. Observación : El conjunto no puede ser base del subespacio generado pues es LD ya que posee 4 vectores. Para obtener una base a partir de él, hay que recordar que si un conjunto es LD, existe algún / algunos vector / vectores que es / son combinación lineal de los restantes.

$\frac{5}{3}.(1;1;1)+\left(-\frac{1}{6}\right).(3;0;1)+\frac{7}{6}.(-1;2;3)=(0;4;5)\therefore$ **B** $=\{.(1;1;1),(3;0;1),(-1;2;3)\}$ **la dimensión es 3** *e)* En $\Re^3$, el conjunto $\{(1;0;0),(2;2;0),(3;3;3)\}$

$\alpha(1;0;0)+\beta(2;2;0)+\gamma(3;3;3)=(x;y;z)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&x\\0&2&3&y\\0&0&3&z\end{array}\right)_{\frac{1}{3}F_3}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&x\\0&2&3&y\\0&0&\boxed{1}&\frac{z}{3}\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&x-z\\0&2&0&y-z\\0&0&1&\frac{z}{3}\end{array}\right)_{\frac{1}{2}F_2}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&x-z\\0&\boxed{1}&0&\frac{y-z}{2}\\0&0&1&\frac{z}{3}\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&x-y\\0&1&0&\frac{y-z}{2}\\0&0&1&\frac{z}{3}\end{array}\right)$$

$r(A)=r(A')=3=n^o$ **de incógnitas** $\Rightarrow$ **SCD** $\Rightarrow$ **el conjunto genera** $\Re^3$

Para que sean base deben ser LI

$\alpha(1;0;0)+\beta(2;2;0)+\gamma(3;3;3)=(0;0;0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&2&3&0\\0&0&3&0\end{array}\right)_{\frac{1}{3}F_3}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&2&3&0\\0&0&\boxed{1}&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)_{\frac{1}{2}F_2}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&\boxed{1}&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

$r(A)=r(A')=3=n^o$ **de incógnitas** $\Rightarrow$ **SCD** $\Rightarrow$ **S** $=\{(0;0;0)\}$ ***los* vectores son LI** $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{B=\{(1;0;0),(2;2;0),(3;3;3)\},\ dimensión\ 3}}$

17) Explicar por qué los siguientes conjuntos no son una base de los espacios vectoriales indicados.

a) $A_1=\{(1;2),(0;3),(2;7)\}$ para $\Re^2$. Para que el conjunto A_1 sea una base de $\Re^2$, debe tener 2 vectores LI, ya que el cardinal de cualquiera de las bases de $\Re^2$ es **2**. Los vectores del conjunto dado son LD

b) $A_2=\{(-1;3;2),(6;1;1)\}$ para $\Re^3$. Para ser base de $\Re^3$, el conjunto debe tener tres vectores LI, ya que el cardinal de cualquiera de las bases de $\Re^3$ es 3.

c) $A_3=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&0\\-1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\1&7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&1\\4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7&1\\2&9\end{pmatrix}\right\}$ para $\Re^{2x2}$. Para ser una base de $\Re^{2x2}$, debería contener 4 vectores, ya que el cardinal de cualquiera de las bases de ese espacio es 4. El conjunto de vectores dado es LD.

18) ¿Qué valores de $k \in \Re$ hacen que el conjunto $\{(1;0;k),(k;1;0),(k+1;1;k)\}$ sea una base de $\Re^3$?

Si quiero que los vectores sean base deben ser L.I y además generadores del espacio al que pertenecen. Tres vectores L.I generan $\Re^3$.
Se plantea entonces la combinación lineal igualada al vector nulo de $\Re^3$

$$\alpha(1;\ 0\ ;k)\ +\beta(k;1;0)\ +\gamma(k+1\ ;1;\ k)=\ (0;0;0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & k & 0 \end{array}\right)$$ Para que estos vectores sean L.I el determinante del sistema homogéneo debe ser distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 1 & k & k+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & k \end{vmatrix} = 1.(k-0)+k(k-k-1)=k-k=0.$$ Se observa que es cero cualquiera sea k

Luego no existen valores de k para que la familia de vectores sea base de $\Re^3$

19) Verificar que el conjunto solución del sistema homogéneo asociado al siguiente sistema de ecuaciones es un subespacio de $(\Re^3;+;\Re;.)$

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ 6x-7y+z=-1 \\ x+4y-5z=4 \end{cases}$$

a) Dar una base y su dimensión.

$$\begin{cases} x - z=0 \\ 6x-7y+z=0 \\ x+4y-5z=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 6 & -7 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right)_{-\frac{1}{7}F_2} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) r(A)=r(A')=2<3 \Rightarrow SCI$$

$$\begin{cases} x - z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \ S=\{\ (x;y;z)\in\Re^3\ /\ x=z\ \wedge\ y=z\ \} \Rightarrow (x;y;z)=(z;z;z)=z(1;1;1)\therefore B=\{\ (1;1;1)\ \}\Rightarrow \dim S=1$$

b) Si el vector $\vec{v}=(3;3;3)$ pertenece al subespacio, expresarlo en dicha base.

El vector (3;3;3) $\in$ S $\Rightarrow$ (3;3;3) = $\alpha(1;1;1)$ $\Rightarrow$ $\alpha=3$

Se pide verificar que el conjunto solución es un subespacio de $(\Re^3;+;\Re;.)$

O sea que: $(S,+,\Re,.)$ es un subespacio de $(\Re^3,+,\Re,.)$, siendo: $S=\{(x;y;z)\in\Re^3 \ / \ x=z \wedge y=z\}$

1) ***S*** es no vacío porque por lo menos $(0;0;0)$ pertenece a ese conjunto

2) Está incluido en $\Re^3$, porque por definición los elementos de ***S*** son vectores de $\Re^3$

3) Esta condición se cumple, lo vemos sumando dos vectores de ***S***:

$(z;z;z)+(z';z';z')=(z+z';z+z';z+z')$ y este resultado pertenece a ***S*** porque es una terna con sus tres componentes iguales.

4) $\alpha.(z;z;z)=(\alpha.z;\alpha.z;\alpha.z)$ y el resultado también es un vector de S.

Como se cumplen las 4 condiciones $(S,+,\Re,.)$ es un subespacio de $(\Re^3;+;\Re;.)$

20) Verificar que el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones es un subespacio de $(\Re^3;+;\Re;.)$

$$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ x \qquad +2z=0 \end{cases}$$

a) Dar una base y su dimensión.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} (1) & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right)_{-\frac{1}{2}F_2} \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & (1) & -5/2 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & 0 \end{array}\right) \quad r(A)=r(A')=2<3 \Rightarrow SCI$$

$$\begin{cases} x \qquad +2z=0 \\ \qquad y-5/2z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S=\{ (x;y;z)\in\Re^3 \ / \ x=-2z \ \wedge \ y=5/2z \}$$

$$(x;y;z)=\left(-2z;\frac{5}{2}z;z\right)=z\left(-2;\frac{5}{2};1\right)$$ Este vector genera el espacio solución y es LI la base es $\boxed{B=\left\{\left(-2;\frac{5}{2};1\right)\right\} \quad \dim S=1}$

b) Si el vector $\vec{v}=(-4;\ 5;\ 2)$ pertenece al subespacio, expresarlo en dicha base.

$$\alpha\left(-2;\frac{5}{2};1\right)=(-4;5;2) \quad \therefore \quad \alpha=2\Rightarrow(-4;5;2)=[2]_B$$

Para verificar que S es un subespacio de $\left(\Re^3;+;\Re;.\right)$ se deben cumplir las 4 condiciones:

1) ***S*** es no vacío porque por lo menos $(0;0;0)$ pertenece a ese conjunto

2) Está incluido en $\Re^3$, porque por definición los elementos de ***S*** son vectores de $\Re^3$

3) Esta condición se cumple, lo vemos sumando dos vectores de ***S***:

$\left(-2z,\frac{5}{2}z,z\right)+\left(-2z',\frac{5}{2}z',z'\right)=\left(-2z-2z',\frac{5}{2}z+\frac{5}{2}z',z+z'\right)=\left(-2(z+z'),\frac{5}{2}(z+z'),z+z'\right)$ y este resultado pertenece a **S**.

4) $\alpha.\left(-2z,\frac{5}{2}z,z\right)=\left(-2\alpha.z,\frac{5}{2}\alpha.z,\alpha.z\right)$ y el resultado también es un vector de ***S***.

Como se cumplen las 4 condiciones $(S;+;\Re;.)$ es un subespacio de $\left(\Re^3;+;\Re;.\right)$

21) En $\Re^3$ se define $A=\left\{(k;1;k),(k;2;2k),(3k;k;-k)\right\}$.

a) Hallar todos los valores de ***k*** para que el conjunto ***A*** sea una base de $\Re^3$.

$\alpha(k;1;k)+\beta(k;2;2k)+\gamma(3k;k;-k)=(0;0;0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & k & 3k & 0\\ 1 & 2 & k & 0\\ k & 2k & -k & 0\end{array}\right)$$

Para que los vectores de A sean LI, el sistema debe tener solución única, el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser distinto de cero

o sea $\begin{vmatrix} k & k & 3k\\ 1 & 2 & k\\ k & 2k & -k\end{vmatrix}\neq 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} k & k & 3k\\ 1 & 2 & k\\ k & 2k & -k\end{vmatrix}=k.k\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & k\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=k^2\left[1\begin{vmatrix} 2 & k\\ 2 & -1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & k\\ 1 & -1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right]=k^2\left[1(-2-2k)-1(-1-k)+3.0\right]=k^2\left[-2-2k+1+k\right]=k^2\left[-1-k\right]$$

$$\therefore k^2\left[-1-k\right]\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{k\neq 0\wedge k\neq -1}$$

Esa es la condición para que los vectores de ***A*** sean LI, pero también para que ***A*** constituya una base de $\Re^3$ ya que tres vectores LI, también son SG de $\Re^3$

b) Hallar todos los valores de k para que A genere un subespacio de dimensión **2**.

Si $k=0$ el conjunto de vectores resulta: $\{(0;1;0)(0;2;0)(0;0;0)\}$ el mismo es LD, porque contiene al $\vec{0}$. Hallamos el subespacio generado por los vectores: $\alpha(0;1;0)+\beta(0;2;0)=(x;y;z)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x \\ 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & z \end{array}\right)$ Para que sea un sistema compatible $x=0 \wedge y=0 \therefore S=\{(x;y;z)\in\Re^3 \;/\; x=z=0\}=\{(0;b;0)\;/\;b\in\Re\}$ **Base B = {(0;1;0)} dim $S=1$**

Si $k=-1$ el conjunto de vectores resulta: $\{(-1;1;-1)(-1;2;-2)(-3;-1;1)\}$

Hallamos el subespacio generado por los vectores: $\alpha(-1;1;-1)+\beta(-1;2;-2)+\gamma(-3;-1;1)=(x;y;z)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -3 & x \\ 1 & 2 & -1 & y \\ -1 & -2 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & x+y \\ 1 & 2 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z+y \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & x+y \\ 1 & 0 & 7 & -2x+y \\ 0 & 0 & 0 & z+y \end{array}\right)$ Para que sea un sistema compatible $z+y=0$.

$S=\{(x;y;z)\in\Re^3 \;/\; z+y=0\}=\{(x;y;z)\in\Re^3 \;/\; z=-y\}=\{(x;y;-y)\}$ $\boxed{B=\{(1;0;0),(0;1;-1)\}\ \mathbf{dim}\ S=2}$ .Luego si $k=-1$ A genera un sub de **dim 2**.

22) En $\Re^3$ se define $A=\{(2;k;1),\ (6;1;5),(2k;1;k+2)\}$

a) Hallar todos los valores de k para que el conjunto A no sea una base de $\Re^3$.

$\alpha(2;k;1)+\beta(6;1;5)+\gamma(2k;1;k+2)=(0;0;0)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 2k & 0 \\ k & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & k+2 & 0 \end{array}\right)$

Para que A no sea una base de $\Re^3$, bastaría con que los vectores de <u>A no sean LI</u>, o sea que exista algún escalar que no sea 0.
Como es un sistema homogéneo, debería tener infinitas soluciones.
Entonces el determinante de la matriz de los coeficientes, debe ser 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2k \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 5 & k+2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & k+2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k+2 \end{vmatrix} + 2k\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2(k+2-5)-6(k^2+2k-1)+2k(5k-1)=2(k-3)-6(k^2+2k-1)+2k(5k-1)=$$

$$=\cancel{2k}\ \cancel{-6}-6k^2-12k\ \cancel{+6}+10k^2\ \cancel{-2k}=4k^2-12k \quad \to |A|=4k^2-12k=0 \quad \to \boxed{|A|=0 \Leftrightarrow k=0 \vee k=3}$$

$\boxed{A \text{ no sea una base de } \Re^3 \text{ si y solo si } k=0 \vee k=3}$

b) Si $\boldsymbol{k}$ **= 0** hallar el subespacio generado, una base del mismo y su dimensión.

Si $k=0 \Rightarrow A=\{(2;0;1),(6;1;5),(0;1;2)\}$

$\alpha(2;0;1)+\beta(6;1;5)+\gamma(0;1;2)=(x;y;z)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 5 & 2 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -6 & x-6y \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & -3 & z-5y \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & x+4y-2z \\ 0 & 1 & 1 & x-6y \\ 1 & 0 & -3 & z-5y \end{array}\right)$ **Para que el sistema sea compatible** $x+4y-2z=0$

$A=\{(x;y;z)\in\Re^3 \,/\, x+4y-2z=0\}=\{(x;y;z)\in\Re^3 \,/\, x=-4y+2z\}=\{(-4y+2z;y;z)\,/\, y\in\Re, z\in\Re\}$

$(-4y+2z;y;z)=(-4y;y;0)+(2z;0;z)=y(-4;1;0)+z(2;0;1)$ $\boxed{B=\{(-4;1;0),(2;0;1)\}\Rightarrow \dim A=2}$

23) Dado $A=\{(-1;2;4),(0;1;2),(1;-1;k)\}$ determinar los valores de $\boldsymbol{k}\in\Re$ para que el conjunto genere un subespacio propio de $\Re^3$.

Reemplazar a $\boldsymbol{k}$ por los valores obtenidos y hallar el subespacio generado, una base del mismo y su dimensión.

$\alpha(-1;2;4)+\beta(0;1;2)+\gamma(1;-1;k)=(x;y;z)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & x \\ 2 & (1) & -1 & y \\ 4 & 2 & k & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & x \\ 2 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & k+2 & z-2y \end{array}\right)$ **Si** $k+2\neq 0 \Rightarrow SCD$ **y** A **genera** $\Re^3$

Para que A **genere un subespacio propio, debe ser** $k=-2$

En ese caso, para que el sistema tenga solución $z-2y=0$

El subespacio generado $\overline{A}=\{(x;y;z)\in\Re^3 \,/\, z-2y=0\}\Rightarrow \overline{A}=\{(x;y;z)\in\Re^3 \,/\, z=2y\}$

$(x;y;z)=(x;y;2y)=(x;0;0)+(0;y;2y)=x(1;0;0)+y(0;1;2)$

$B=\{(1;0;0),(0;1;2)\}$ **dim** $A=2$

24) Un valor de **"*a*"** para que el conjunto solución del sistema homogéneo asociado a $\begin{cases} ax_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ (a+1)x_2 + 2x_3 = 4 \\ (a^2-1)x_3 = 1 \end{cases}$ sea un subespacio de $(\Re^3, +, \Re, \, . \,)$ de dimensión cero es:

***a)* *a* = 0** ***b)* *a* = 1** ***c)* *a* = –1** ***d)* *a* = 2**

$$\begin{cases} \mathbf{a}x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ (a+1)x_2 + 2x_3 = 0 \\ (a^2-1)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Un subespacio solución es de dimensión cero si y solo si la única solución es la trivial.
Para que esto ocurra el determinante de los coeficientes del sistema homogéneo debe ser distinto de cero

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{vmatrix} = a(a+1)(a^2-1) \neq 0 \Rightarrow \quad a \neq 0 \quad \wedge \quad a \neq 1 \quad \wedge \quad a \neq -1 \quad \therefore \boxed{\text{La respuesta correcta es } d)}$$