UNIDAD TEMÁTICA 2

MATRICES Y DETERMINANTES

1) Escribir las matrices definidas por las siguientes expresiones:

$$A \in \Re^{2x3}, A = \left(a_{ij}\right) \text{ con } a_{ij} = 1 - 2j \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \Re^{2x3} \wedge a_{ij} = 1 - 2j \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}}$$

$$\text{porque} \begin{cases} a_{11} = 1 - 2.1 = -1, & a_{12} = 1 - 2.2 = -3, & a_{13} = 1 - 2.3 = -5 \\ a_{21} = 1 - 2.1 = -1, & a_{22} = 1 - 2.2 = -3, & a_{23} = 1 - 2.3 = -5 \end{cases}$$

$$B \in \Re^{3x3}, B = \left(b_{ij}\right) \text{ con } b_{ij} = \begin{cases} 3 & \Leftrightarrow \quad i = j \\ i + j^2 & \Leftrightarrow \quad i \neq j \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \in \Re^{3x3} \wedge b_{ij} = \begin{cases} 3 & \Leftrightarrow i = j \\ i + j^2 & \Leftrightarrow i \neq j \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 3 & 3 & 11 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\text{porque} \begin{cases} b_{11} = 3, \quad b_{22} = 3, \quad b_{33} = 3, \\ b_{12} = 1 + 2^2 = 5, \quad b_{13} = 1 + 3^2 = 10, \quad b_{21} = 2 + 1^2 = 3 \\ b_{23} = 2 + 3^2 = 11, \quad b_{31} = 3 + 1^2 = 4, \quad b_{32} = 3 + 2^2 = 7 \end{cases}$$

$$C \in \Re^{3x3}, C = \left(c_{ij}\right) \text{ con } c_{ij} = \begin{cases} 2i & \Leftrightarrow \quad i < j \\ i^2 + j^2 & \Leftrightarrow \quad i \geq j \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 + 1^2 & 2x1 & 2x1 \\ 2^2 + 1^2 & 2^2 + 2^2 & 2x2 \\ 3^2 + 1^2 & 3^2 + 2^2 & 3^2 + 3^2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 4 \\ 10 & 13 & 18 \end{pmatrix}}$$

$$D \in \Re^{3x2}, D = \left(d_{ij}\right) \text{ con } d_{ij} = \begin{cases} 3i - j & \Leftrightarrow \quad i \leq j \\ 0 & \Leftrightarrow \quad i > j \end{cases} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1 - 1 & 3.1 - 2 \\ 0 & 3.2 - 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

2) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 6\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

Hallar:

$$a)\ \ 4A+B=4\begin{pmatrix}2 & -5 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -20 & 12\\ 4 & 0 & 16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 6\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}4 & -19 & 14\\ 3 & 0 & 22\end{pmatrix}}$$

$$b)\ \ \left(-B+C^T\right)+3A=\left[-\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 6 & -1 & 2\end{pmatrix}\right]+3\begin{pmatrix}2 & -5 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 7 & -1 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & -15 & 9\\ 3 & 0 & 12\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\left(-B+C^T\right)+3A=\begin{pmatrix}12 & -15 & 9\\ 10 & -1 & 8\end{pmatrix}}$$

$$c)\ \ \left[\frac{1}{2}(A+B)\right]^T+2C=\left[\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}2 & -5 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 6\end{pmatrix}\right)\right]^T+2\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\left[\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-2 & -4 & 5\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}\right)\right]^T+2\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 5/2\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix}4 & 12\\ 2 & -2\\ 4 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 5/2\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 0\\ 5/2 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 12\\ 2 & -2\\ 4 & 4\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}3 & 12\\ 0 & -2\\ 13/2 & 9\end{pmatrix}}$$

$$d)\ \ C^T-2(A+B)=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}^T-2\left(\begin{pmatrix}2 & -5 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 6\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 6 & -1 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2 & -4 & 5\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 6 & -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 8 & -10\\ 0 & 0 & -20\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}6 & 9 & -8\\ 6 & -1 & -18\end{pmatrix}}$$

3) Hallar, si existen, los valores de los reales a,b,c,d que verifiquen $3.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 6 \\ -1 & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & a+b \\ c+d-1 & 2d+3 \end{pmatrix}$

$$3.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 6 \\ -1 & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & a+b \\ c+d-1 & 2d+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4 & a+b+6 \\ c+d-2 & d+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a = a+4 \Rightarrow \boxed{a=2} \\ 3b = a+b+6 \Rightarrow 3b-b = 2+6 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow \boxed{b=4} \\ 3c = c+d-2 \Rightarrow 3c-c = 3/2-2 \Rightarrow 2c = -1/2 \Rightarrow \boxed{c=-1/4} \\ 3d = d+3 \Rightarrow \boxed{d=3/2} \end{cases}$$

4) Encontrar $X \in \Re^{m\times n}$ que verifique la siguiente igualdad: $2X - 5\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 5X + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}^T$

$$2X - 5\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 5X + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}^T \Rightarrow 2X - 5\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 5X + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow 2X + \begin{pmatrix} -10 & 5 & -20 \\ -15 & -5 & -10 \end{pmatrix} = 5X + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -10 & 5 & -20 \\ -15 & -5 & -10 \end{pmatrix} = \cancel{5X} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Resto M a M

$$5X = \cancel{5X}$$

$$-3X + \cancel{\begin{pmatrix} -10 & 5 & -20 \\ -15 & -5 & -10 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Resto M a M

$$\cancel{\begin{pmatrix} -10 & 5 & -20 \\ -15 & -5 & -10 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -10 & 5 & -20 \\ -15 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$-3X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & 5 & -20 \\ -15 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

Multiplico M a M por $-1/3$

$$-3X = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 19 \\ 15 & 9 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -4 & \frac{4}{3} & -\frac{19}{3} \\ -5 & -3 & -\frac{16}{3} \end{pmatrix}}$$

5) Si $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$ $\quad D=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$

Hallar:

a) $A.B-2\,C.D=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}12&16\\12&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}24&32\\24&32\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-24&-32\\-24&-32\end{pmatrix}}$

b) $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}}$

c) $(B.C)^2=\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\right)^2=\left(\begin{pmatrix}0&0\\4&4\end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix}0&0\\4&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&0\\4&4\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0&0\\16&16\end{pmatrix}}$

d) Obtener una matriz E de manera que: $A+12\,B-3\,C+E$ sea la matriz nula de orden **2 x 2**

$$A+12B-3C+E=N$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+12\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_{11}&e_{12}\\e_{21}&e_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\12&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&6\\6&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_{11}&e_{12}\\e_{21}&e_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-5+e_{11}&-6+e_{12}\\7+e_{21}&6+e_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-5+e_{11}=0\Rightarrow e_{11}=5\\-6+e_{12}=0\Rightarrow e_{12}=6\\7+e_{21}=0\Rightarrow e_{21}=-7\\6+e_{22}=0\Rightarrow e_{22}=-6\end{cases}\Rightarrow\boxed{E=\begin{pmatrix}5&6\\-7&-6\end{pmatrix}}$$

6) Si $U=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad V=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\-1 & 3 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad Y=I$ $\quad$ Hallar:

a) $U.V=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.1+0.2+1.3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}4\end{pmatrix}}$

b) $V.U+X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\-1 & 3 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 0 & 2\\3 & 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\-1 & 3 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\1 & 3 & 2\\3 & 1 & 4\end{pmatrix}}$

c) $X.Y=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\-1 & 3 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\-1 & 3 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}}$

7) Si $U=\begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -2 & -3\end{pmatrix}$ $\quad V=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\1 & -2 & -4\\-1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ $\quad$ Verificar:

a) $U^2=U.U=\begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -2 & -3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -2 & -3\end{pmatrix}$ $\qquad V^2=V.V=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\1 & -2 & -4\\-1 & 2 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\1 & -2 & -4\\-1 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\1 & -2 & -4\\-1 & 2 & 4\end{pmatrix}$

b)

$$U.V=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&2&4\\1&-2&-4\\-1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$V.U=\begin{pmatrix}-1&2&4\\1&-2&-4\\-1&2&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U.V=V.U$$

c) $$U+V=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2&4\\1&-2&-4\\-1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

8) Verificar que $A.X = A.Y$ (aunque $X \neq Y$), siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-5&2&3\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix}2&5&-1&-7\\-2&1&3&4\\3&2&1&2\end{pmatrix}\qquad Y=\begin{pmatrix}3&6&0&-6\\-1&2&4&5\\4&3&2&3\end{pmatrix}$$

$$A.X=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-5&2&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&5&-1&-7\\-2&1&3&4\\3&2&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&5&-6&-13\\-7&5&-2&-16\\-5&-17&14&49\end{pmatrix}$$

$$A.Y=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-5&2&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3&6&0&-6\\-1&2&4&5\\4&3&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&5&-6&-13\\-7&5&-2&-16\\-5&-17&14&49\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A.X=A.Y$$

9) Si $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, calcular:

$$a)\quad AC+B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 22\\ 9 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2 & 26\\ 8 & 6\end{pmatrix}}$$

$$b)\quad CB-4A^T=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-2 & 16\\ 0 & 4\\ -4 & 8\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 16\\ 0 & 4\\ -4 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & -8\\ 4 & -12\\ -20 & 0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-6 & 8\\ 4 & -8\\ -24 & 8\end{pmatrix}}$$

$$c)\quad B^2\left(A+C^T\right)=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}^2\left[\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}^T\right]=\begin{pmatrix}-4 & 8\\ -2 & 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-4 & 8\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0 & 5\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}16 & 24 & 12\\ -8 & 0 & -10\end{pmatrix}}$$

$$d)\quad C.A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}7 & 3 & 15\\ 1 & -1 & 5\\ 8 & 12 & 0\end{pmatrix}}$$

10) Obtener, si existen, todas las matrices X e Y que verifiquen: ***a)*** $\begin{cases} 3X+2Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} \\ X-2Y=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 8\end{pmatrix}\end{cases}$

- Sumamos miembro a miembro

$$3X+\cancel{2Y}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$X-\cancel{2Y}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 8\end{pmatrix}$$

$$3X+X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 8\end{pmatrix} \quad \text{y obtenemos} \quad 4X=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 9\end{pmatrix}$$

- Multiplicamos por el escalar $1/4$ MaM: $1/4.(4X)=1/4\begin{pmatrix}0 & 3/4\\ 1/2 & 9/4\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}0 & 3/4\\ 1/2 & 9/4\end{pmatrix}}$

- Multiplicamos la segunda ecuación por el escalar -3,

  Y sumamos miembro a miembro

$$\cancel{3X}+2Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\cancel{-3X}+6Y=\begin{pmatrix}3 & -9\\ 0 & -24\end{pmatrix}$$

$$2Y+6Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -9\\ 0 & -24\end{pmatrix} \quad \text{y obtenemos} \quad 8Y=\begin{pmatrix}4 & -9\\ 2 & -23\end{pmatrix}$$

- Multiplicamos por el escalar $1/8$ MaM: $1/8.(8Y)=1/8\begin{pmatrix}4 & -9\\ 2 & -23\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{Y=\begin{pmatrix}1/2 & -9/8\\ 1/4 & -23/8\end{pmatrix}}$

$$b)\begin{cases} X-3Y=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}\\ 3X+Y=\begin{pmatrix}1&-5\\0&3\end{pmatrix}\end{cases}$$

Calculo la Matriz X

$$\begin{cases} X-3Y=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}\\ 3X+Y=\begin{pmatrix}1&-5\\0&3\end{pmatrix}\end{cases}$$ Multiplicamos por el escalar **3** la segunda ecuación

$$X-\cancel{3Y}=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}$$

$$9X\cancel{+3Y}=\begin{pmatrix}3&-15\\0&9\end{pmatrix}$$ Sumamos miembro a miembro y obtenemos :

$$10X=\begin{pmatrix}4&-14\\2&9\end{pmatrix}$$

Multiplicamos por el escalar $1/10$ MaM :

$$1/10.(10X)=1/10\begin{pmatrix}4&-14\\2&9\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}2/5&-7/5\\1/5&9/10\end{pmatrix}}$$

Calculo la Matriz Y

$$\begin{cases} X-3Y=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}\\ 3X+Y=\begin{pmatrix}1&-5\\0&3\end{pmatrix}\end{cases}$$ Multiplicamos la primera ecuación por el escalar **3**

$$\cancel{3X}-9Y=\begin{pmatrix}3&3\\6&0\end{pmatrix}$$

$$\cancel{3X}+Y=\begin{pmatrix}1&-5\\0&3\end{pmatrix}$$ Restamos miembro a miembro y obtenemos :

$$-10Y=\begin{pmatrix}2&8\\6&-3\end{pmatrix}$$

Multiplicamos por el escalar $-1/10$ MaM :

$$-1/10.(-10Y)=-1/10\begin{pmatrix}2&8\\6&-3\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{Y=\begin{pmatrix}-1/5&-4/5\\-3/5&3/10\end{pmatrix}}$$

11) Sabiendo que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B} \in \Re^{n\times n}$ analizar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, justificando la respuesta:

a) $\forall A, \forall B \in \Re^{nxn} : (A+B).(A-B) = A^2 - B^2$

$(A+B).(A-B) = A^2 - A.B + B.A - B^2$, en general $A.B \neq B.A$, luego: $(A+B).(A-B) \neq A^2 - B^2$

b) $\forall A, \forall B \in \Re^{nxn} : (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$\left(A-B\right)^2 = \left(A-B\right)\cdot\left(A-B\right) \Rightarrow \left(A-B\right)^2 = A^2 - A\cdot B - B\cdot A + B^2$

En general $A\cdot B \neq B\cdot A$, luego: $\left(A-B\right)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$

c) $\forall A, \forall I \in \Re^{nxn} : (A+I).(A-I) = A^2 - I$

$(A+I).(A-I) = A^2 - A.I + I.A - I^2$

Como $A.I = A \wedge I.A = A \wedge I.I = I \Rightarrow (A+I)\cdot(A-I) = A^2 - A + A - I$ luego $(A+I)\cdot(A-I) = A^2 - I$

d) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices permutables, entones $(A+B).(A-B) = A^2 - B^2$.

$(A+B).(A-B) = A^2 - A.B + B.A - B^2$

Como $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son permutables entonces $A.B = B.A \Rightarrow (A+B).(A-B) = A^2 - A.B + A.B - B^2 \Rightarrow (A+B).(A-B) = A^2 - B^2$

Luego: $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$

e) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices permutables, entonces $(A-B)^2 = A^2 - B^2$.

$\left(A-B\right)^2 = \left(A-B\right).\left(A-B\right) \Rightarrow \left(A-B\right)^2 = A^2 - A.B - B.A + B^2$

Como $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son permutables entonces $A.B = B.A$

$\left(A-B\right)^2 = A^2 - A.B - A.B + B^2 \Rightarrow \left(A-B\right)^2 = A^2 - 2A.B + B^2$. Luego: $\left(A-B\right)^2 \neq A^2 - B^2$

12) Un fabricante que elabora dos artículos, sillas y escritorios, desea fabricar **12** sillas y **20** escritorios. La fabricación de sillas requiere, por unidad: **12** unidades de madera, $1/2$ botella de barniz y **6** horas/hombre. Los escritorios requieren, también por unidad: **25** unidades de madera, **2** botellas de barniz y **20** horas/hombre.

Los costos de tales requerimientos son:
Madera **$6** por unidad
Barniz **$18** por unidad
1 hora/hombre **$15**

Aplicar cálculo matricial para obtener:
a) El costo de elaboración de **12** sillas y **20** escritorios
b) El costo total por cada tipo de artículo.

	U / MADERA	***U / BOT.DE BARNIZ***	***MANO DE OBRA***
SILLAS	**12**	**1/2**	**6**
ESCRITORIOS	**25**	**2**	**20**

$$\text{Costo total} = \mathbf{12}\begin{pmatrix}\mathbf{12} & \mathbf{1/2} & \mathbf{6}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\mathbf{6}\\ \mathbf{18}\\ \mathbf{15}\end{pmatrix} + \mathbf{20}\begin{pmatrix}\mathbf{25} & \mathbf{2} & \mathbf{20}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\mathbf{6}\\ \mathbf{18}\\ \mathbf{15}\end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{12}(\mathbf{171}) + \mathbf{20}(\mathbf{486}) = (\mathbf{2052}) + (\mathbf{9720}) = (\mathbf{11772})$$

Cada silla **$ 171** y las $\boxed{\text{12 sillas } \$2052}$

Cada escritorio **$ 486** y los $\boxed{\text{20 escritorios } \$9720}$

$\boxed{\text{Costo total } \$\,11772}$

13) Una empresa de generación de petróleo debe transportar el crudo a cuatro destilerías ubicadas en diferentes puntos del país. Las cantidades de crudo en metros cúbicos que debe transportar son **1000** a la primera destilería, **1550** a la segunda, **4580** a la tercera y **2350** a la cuarta. Los costos del transporte por metro cúbico a cada una de las destilerías son, en dólares, **50** para la primera destilería, **80** para la segunda, **70** para la tercera y **90** para la cuarta. ¿Cuál es costo total de transporte de la empresa? (Resolver matricialmente)

$$\begin{pmatrix} 1000 & 1550 & 4580 & 2350 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 70 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 706100 \end{pmatrix}$$ $\boxed{\text{El costo total es } \mathbf{\$706100}}$

14) Dadas las siguientes matrices

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \Re^{2x2} \quad \wedge \quad Q = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 13 \end{pmatrix} \in \Re^{2x2}$$

a) Hallar $M \in \Re^{2x2}$ tal que $P.M = Q$

$$P \cdot M = Q \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3m_{11} + 2m_{21} & 3m_{12} + 2m_{22} \\ 4m_{11} + 3m_{21} & 4m_{12} + 3m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3m_{11} + 2m_{21} = 7 \\ 3m_{12} + 2m_{22} = 9 \\ 4m_{11} + 3m_{21} = 10 \\ 4m_{12} + 3m_{22} = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} 3m_{11} + 2m_{21} = 7 \\ 4m_{11} + 3m_{21} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} m_{11} = 1 \\ m_{21} = 2 \end{array} \\ \begin{cases} 3m_{12} + 2m_{22} = 9 \\ 4m_{12} + 3m_{22} = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} m_{12} = 1 \\ m_{22} = 3 \end{array} \end{array} \Rightarrow \boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

Resolución de los dos sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3m_{11} + 2m_{21} = 7 \\ 4m_{11} + 3m_{21} = 10 \end{cases}$$

Resolvemos por el método de sustitución

$3m_{11} + 2m_{21} = 7 \rightarrow m_{11} = \dfrac{7-2m_{21}}{3}$ y reemplazamos en la segunda ecuación $4.\left(\dfrac{7-2m_{21}}{3}\right) + 3m_{21} = 10$

Operamos $4.\left(\dfrac{7}{3} - \dfrac{2}{3}m_{21}\right) + 3m_{21} = 10 \rightarrow \dfrac{28}{3} - \dfrac{8}{3}m_{21} + 3m_{21} = 10 \rightarrow \dfrac{-8m_{21}+9m_{21}}{3} = 10 - \dfrac{28}{3} \rightarrow \dfrac{1}{3}m_{21} = \dfrac{2}{3} \rightarrow \boxed{m_{21} = 2}$

Reemplazamos en $m_{11} = \dfrac{7-2m_{21}}{3} \rightarrow m_{11} = \dfrac{7-2.2}{3} \rightarrow \boxed{m_{11} = 1}$

$$\begin{cases} 3m_{12} + 2m_{22} = 9 \\ 4m_{12} + 3m_{22} = 13 \end{cases}$$

Resolvemos por el método de sustitución

$3m_{12} + 2m_{22} = 9 \rightarrow m_{12} = \dfrac{9-2m_{22}}{3}$ y reemplazamos en la segunda ecuación $4.\left(\dfrac{9-2m_{22}}{3}\right) + 3m_{22} = 13$

Operamos $12 - \dfrac{8}{3}m_{22} + 3m_{22} = 13 \rightarrow -\dfrac{8}{3}m_{22} + 3m_{22} = 1 \rightarrow \dfrac{-8+9}{3}m_{22} = 1 \rightarrow \dfrac{1}{3}m_{22} = 1 \rightarrow \boxed{m_{22} = 3}$

Reemplazamos en $m_{12} = \dfrac{9-2m_{22}}{3} \rightarrow m_{12} = \dfrac{9-2.3}{3} \rightarrow \boxed{m_{12} = 1}$

Otra forma :

$$P \cdot M = Q \Rightarrow M = P^{-1} \cdot Q$$

Calculamos P^{-1}

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |P| = 1 \therefore \exists P^{-1}$$

$$P^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad Adj(P) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{|P|} . Adj(P) = \frac{1}{1} . \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{luego } M = P^{-1} \cdot Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 13 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

b) Una fábrica produce dos artículos. La matriz ***P*** muestra en la fila **1** la cantidad de metros de hilado de algodón de dos tipos necesarios para fabricar el artículo **1** y en la fila **2** las correspondientes al artículo **2**. Si la columna **1** de ***Q*** proporciona el costo de producción de cada artículo en abril y en la columna **2** lo propio del mes de mayo. ¿Qué representa la **m**atriz ***M***?

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{m hilado tipo } \mathbf{1} \text{ / artículo } \mathbf{1} & \text{m hilado tipo } \mathbf{2} \text{ / artículo } \mathbf{1} \\ \text{m hilado tipo } \mathbf{1} \text{ / artículo } \mathbf{2} & \text{m hilado tipo } \mathbf{2} \text{ / artículo } \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{precio hilado tipo } \mathbf{1} \text{ / Abril} & \text{precio hilado tipo } \mathbf{1} \text{ / Mayo} \\ \text{precio hilado tipo } \mathbf{2} \text{ / Abril} & \text{precio hilado tipo } \mathbf{2} \text{ / Mayo} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{costo artículo } \mathbf{1} \text{ en Abril} & \text{costo artículo } \mathbf{1} \text{ en Mayo} \\ \text{costo artículo } \mathbf{2} \text{ en Abril} & \text{costo artículo } \mathbf{2} \text{ en Mayo} \end{pmatrix}$$

15) Una empresa produce 3 tamaños de cintas de vídeo en dos calidades diferentes. La producción (en miles) en su planta ***A*** está dada por la matriz siguiente:

	Tamaño 1	Tamaño 2	Tamaño 3
Calidad 1	27	36	30
Calidad 2	18	26	21

La producción en su planta ***B*** está dada por la matriz siguiente:

	Tamaño 1	Tamaño 2	Tamaño 3
Calidad 1	32	40	35
Calidad 2	25	38	30

a) Escribir una matriz que represente la producción de cintas en ambas plantas.

$$A=\begin{pmatrix}27 & 36 & 30\\ 18 & 26 & 21\end{pmatrix} \wedge B=\begin{pmatrix}32 & 40 & 35\\ 25 & 38 & 30\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A+B=\begin{pmatrix}59 & 76 & 65\\ 43 & 64 & 51\end{pmatrix}}$$

b) El dueño de la empresa planea abrir una tercera planta en ***C***, la que tendría una vez y media la capacidad de la planta ***A***. Escribir la matriz que representa la producción de la nueva planta.

$$C=\frac{3}{2}A \Rightarrow C=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}27 & 36 & 30\\ 18 & 26 & 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40,5 & 54 & 45\\ 27 & 39 & 31,5\end{pmatrix}$$

c) ¿Cuál será la producción total de las tres plantas?

$$(A+B)+C=\begin{pmatrix}59 & 76 & 65\\ 43 & 64 & 51\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}40,5 & 54 & 45\\ 27 & 39 & 31,5\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}99,5 & 130 & 110\\ 70 & 103 & 82,5\end{pmatrix}}$$

16) Indicar Verdadero o Falso. Justificar claramente la respuesta

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ es idempotente

$\boldsymbol{A}$ es idempotente $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ luego es $\boldsymbol{A}$ idempotente (Verdadero)

b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es involutiva

$\boldsymbol{A}$ es involutiva $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ luego es $\boldsymbol{A}$ involutiva (Verdadero)

c) Si $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{N} \quad \wedge \quad \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{N} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{N}$

Contraejemplo $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos $\boldsymbol{A.B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Luego $\boldsymbol{A.B} = \boldsymbol{N}$ **(**Falso)

d) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 7 & 0\end{pmatrix}$ son conmutables

$$\left.\begin{aligned}A.B&=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & 5\\ 7 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 28 & 0\end{pmatrix}\\ B.A&=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 7 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 20\\ -7 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}A.B\neq B.A \text{ No son conmutables (Falso)}$$

17) Demostrar que si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada:

a) $\forall A\in\Re^{n\times n}: A+A^T$ es simétrica.

Hipótesis:

$A\in\Re^{nxn}$

Tesis:

$A+A^T$ es simétrica

$A+A^T=(A+A^T)^T$

Demostración: Partimos de uno de los miembros de la tesis

$$\left(A+A^T\right)^T \underset{1}{=} A^T+\left(A^T\right)^T \underset{2}{=} A^T+A \underset{3}{=} A+A^T$$

(1) Por propiedad de la traspuesta de una suma.

(2) Por propiedad de la traspuesta de la traspuesta de una matriz.

(3) Por propiedad conmutativa de la adición. $\boxed{\text{Se verifica la tesis}}$

b) Si una matriz es involutiva, entonces es igual a su inversa.

Hipótesis : $\boldsymbol{A}$ es involutiva o sea $\boldsymbol{A^2 = I}$ Tesis : $\boldsymbol{A = A^{-1}}$

Demostración **:**

Partimos de la tesis $\boldsymbol{A = A^{-1}}$

(1) $\boldsymbol{A.A = A.A^{-1}}$

(2) $\boldsymbol{A^2 = I}$

(3) Por hipótesis $\boldsymbol{A^2 = I}$ $\boldsymbol{I = I}$

(1) Multiplicamos miembro a miembro la igualdad por la matriz $\boldsymbol{A}$ por izquierda.

(2) Por definición de potencia de una matriz y definición de matriz inversa de $\boldsymbol{A}$

(3) Es una identidad, por lo tanto se demuestra que la proposición es verdadera.

c) $\boldsymbol{\forall A \in \Re^{n\times n} : A - A^T}$ es antisimétrica.

Hipótesis : $\boldsymbol{A \in \Re^{nxn}}$ Tesis : $\boldsymbol{A - A^T}$ es antisimétrica

$$\boldsymbol{A - A^T = -(A - A^T)^T}$$

Demostración : Partimos de uno de los miembros de la tesis

$$-\left[\left(A - A^T\right)^T\right] \underset{1}{=} -\left[A^T - \left(A^T\right)^T\right] \underset{2}{=} -\left[A^T - A\right] \underset{3}{=} -A^T + A \underset{4}{=} A - A^T$$

(1) Por propiedad de la traspuesta de una suma.

(2) Por propiedad de la traspuesta de la traspuesta de una matriz.

(3) Por propiedad distributiva de "." con respecto a "+"

(4) Por propiedad conmutativa de la adición. $\boxed{\text{Se verifica la tesis}}$

d) $\forall A \in \Re^{m\times n} : A.A^T$ es simétrica.

Hipótesis : $A \in \Re^{nxn}$ Tesis : $A.A^T$ es simétrica o sea $A.A^T = (A.A^T)^T$

Demostración : Partimos de uno de los miembros de la tesis

$$\left(A.A^T\right)^T \underset{1}{=} \left(A^T\right)^T.A^T \underset{2}{=} A.A^T$$

(1) Por propiedad de la traspuesta de un producto.

(2) Por propiedad de la traspuesta de la traspuesta de una matriz.

$\boxed{\text{Se verifica la tesis}}$

e) Si A es idempotente, entonces $\left(A-I\right)^2 = I-A$

Hipótesis : A es idempotente o sea $A^2 = A$ Tesis : $(A-I)^2 = I-A$

Demostración :

Partimos de la tesis	$(A-I)^2 = I-A$
Por definición de potenciación de matrices	$(A-I).(A-I) = I-A$
(1)	$A^2 - A.I - I.A + I^2 = I-A$
(2)	$A^2 - A - A + I = I - A$
Por hipótesis $A^2 = A$	$A - A - A + I = I - A$
(3)	$-A + I = I - A$
(4)	$I - A = I - A$

$\Rightarrow$

(1) Propiedad distrib. de la multip. de matrices respecto de la adición de matrices.

(2) La matriz identidad es neutro en la multiplicación de matrices : $I.A = A.I = A$

(3) Cancelamos A y $-A$ por ser matrices opuestas : $A + (-A) = N$

(4) Es una identidad, por lo tanto se demuestra que la proposición es verdadera.

f) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices idempotentes y permutables, entonces $\boldsymbol{A.B}$ es idempotente.

Hipótesis: $\boldsymbol{A}$ es idempotente o sea $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{B}$ es idempotente o sea $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A.B} = \boldsymbol{B.A}$

Tesis: $(\boldsymbol{A.B})^2 = \boldsymbol{A.B}$

Demostración

$(\boldsymbol{A.B})^2 = (\boldsymbol{A.B}).(\boldsymbol{A.B}) = (\boldsymbol{A.B}).(\boldsymbol{B.A}) = \boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B.B}).\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A.B}^2.\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A.B.A} = (\boldsymbol{A.B}).\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}.(\boldsymbol{A.A}) = \boldsymbol{B.A}^2 = \boldsymbol{B.A}$

Luego $(\boldsymbol{A.B})^2 = \boldsymbol{B.A}$

g) $\boldsymbol{A}$ es involutiva si y sólo si $\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{N}$

Hipótesis: $\boldsymbol{A}$ es involutiva o sea $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$

Tesis: $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \cdot (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{N}$

Demostración

Partimos de la tesis:	$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \cdot (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{N}$
(1)	$\boldsymbol{I}^2 + \boldsymbol{I.A} - \boldsymbol{A.I} - \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{N}$
(2)	$\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{N}$
(3)	$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{N}$
Por hipótesis $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{N}$
(4)	$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}$

$\Rightarrow$

(1) Propiedad distrib. de la multiplicación de matrices respecto de la adición de matrices.
(2) La matriz identidad es neutro en la multiplicación de matrices: $\boldsymbol{I.A} = \boldsymbol{A.I} = \boldsymbol{A}$
(3) Cancelamos $\boldsymbol{A}$ y $-\boldsymbol{A}$ por ser matrices opuestas: $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{N}$
(4) Es una identidad, por lo tanto se demuestra que la proposición es verdadera.

18) Si $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix}$, hallar los valores reales de a y b para los cuales A es idempotente.

A es idempotente $\Leftrightarrow A^2 = A$

$$A^2 = A.A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-a & -2-b\\ 2a+ba & -a+b^2\end{pmatrix}$$

Si $A^2 = A$ entonces planteamos : $\begin{pmatrix}4-a & -2-b\\ 2a+ba & -a+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix}$

Aplicando la definición de igualdad de matrices obtenemos :

$$\begin{cases}4-a=2 & \Rightarrow \boxed{a=2}\\ -2-b=-1 & \Rightarrow \boxed{b=-1}\\ 2a+ba=a & \text{Reemplazamos } a \text{ y } b \text{ por los valores hallados y se verifica la igualdad}\\ -a+b^2=b & \text{Reemplazamos } a \text{ y } b \text{ por los valores hallados y se verifica la igualdad}\end{cases}$$

19) Calcular los siguientes determinantes: $a)\ \Delta(A)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}$ $b)\ \Delta(B)=\begin{vmatrix}2 & 4 & 3\\ -1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$ $c)\ \Delta(C)=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 2 & -4 & 8\\ 3 & 4 & 2 & -1\end{vmatrix}$ $d)\ \Delta(D)=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 3 & 2\end{vmatrix}$

a) Desarrollamos por la Regla de Laplace utilizando la primera columna

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-0.\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}+4.\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=2.(4)-0.(-1)+4\,(-7)=\boxed{-20}$$

b) Desarrollamos por la Regla de Laplace utilizando la primera fila

$$\Delta(B)=\begin{vmatrix}2 & 4 & 3\\ -1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-4.\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}+3.\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2.(5)-4.(-6)+3\,(-13)=\boxed{-5}$$

c) No usamos la Regla de Laplace porque existe una combinación lineal, aplicamos propiedades

$$\Delta(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{matrix} \quad \therefore\ \Delta(C) = 0 \quad \text{porque} \quad F_3 = 2F_1$$

Utilizando la Regla de Laplace y desarrollando por la primera columna:

$$\Delta(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 8 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 8 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 1.\boxed{82} - 0 + 2\boxed{-41} - 3.\boxed{0} = 82 - 82 = \boxed{0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 8 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1(4-16) - 1(-2-32) + 3(4+16) = -12 + 34 + 60 = \boxed{82}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1-6) + 2(-1-12) + 4(2-4) = -7 - 26 - 8 = \boxed{-41}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 1(8+12) + 2(8-6) + 4(-4-2) = 20 + 4 - 24 = \boxed{0}$$

d) Desarrollamos por la Regla de Laplace utilizando la primera columna. Cada determinante de 3x3 hay que resolverlo por separado y luego colocarlo en la expresión.

$$\Delta(D)=\begin{vmatrix}-1&1&2&1\\0&3&2&-1\\1&4&2&1\\3&1&3&2\end{vmatrix}=(-1)(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3&2&-1\\4&2&1\\1&3&2\end{vmatrix}+\cancel{0\,(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\4&2&1\\1&3&2\end{vmatrix}}+1(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\3&2&-1\\1&3&2\end{vmatrix}+3(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\3&2&-1\\4&2&1\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}3&2&-1\\4&2&1\\1&3&2\end{vmatrix}}_{-21}+1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&2&1\\3&2&-1\\1&3&2\end{vmatrix}}_{0}-3\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&2&1\\3&2&-1\\4&2&1\end{vmatrix}}_{-12}=(-1).(-21)+1.\,0-3.(-12)=21+36=\boxed{57}$$

Desarrollamos los determinantes de orden 3

Desarrollamos por la primera fila

$$\begin{vmatrix}3&2&-1\\4&2&1\\1&3&2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}4&1\\1&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}4&2\\1&3\end{vmatrix}=3(1)-2(7)-1(10)=\boxed{-21}$$

Desarrollamos por la primera fila

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\3&2&-1\\1&3&2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2&-1\\3&2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3&-1\\1&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}=1(7)-2(7)+1(7)=\boxed{0}$$

Desarrollamos por la primera fila

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\3&2&-1\\4&2&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2&-1\\2&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3&-1\\4&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}3&2\\4&2\end{vmatrix}=1(4)-2(7)+1(-2)=\boxed{-12}$$

20) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 0 & -x & 0 \\ -2 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = 0$

Aplico Laplace y desarrollo por la segunda fila e igualo a cero según lo pedido y luego resolvemos la ecuación que resulta:

$$(-x).\begin{vmatrix} 1-x & -2 \\ -2 & 4-x \end{vmatrix} = (-x).[(1-x)(4-x)-(-2)(-2)] = (-x).\left[x^2-5x\right] \underset{\substack{\textit{Factoreamos} \\ \left[x^2-5x\right]=x(x-5)}}{=} (-x).\,x.(x-5)=0 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2 = 0 \ \vee\ x=5}$$

b) $\begin{vmatrix} 2-x & -3 & 6 \\ 4 & 1+x & -2 \\ 2 & -1 & 2+x \end{vmatrix} = 0$

Utilizamos la regla de Laplace para resolver el determinante que desarrollamos por la segunda columna e igualamos a cero según lo pedido. Luego resolvemos la ecuación que resulta:

$$\begin{vmatrix} 2-x & -3 & 6 \\ 4 & 1+x & -2 \\ 2 & -1 & 2+x \end{vmatrix} = -(-3).\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2+x \end{vmatrix} + (1+x).\begin{vmatrix} 2-x & 6 \\ 2 & 2+x \end{vmatrix} - (-1).\begin{vmatrix} 2-x & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3.[4(2+x)+4] + (1+x).[(2-x)(2+x)-12] + 1.[(2-x)(-2)-24] = 3.[8+4x+4] + (1+x).\left[4-x^2-12\right] + 1.[-4+2x-24] =$$

$$= 3.[4x+12] + (1+x).\left[-x^2-8\right] + 1\ .[2x-28] = 12x+36-x^2-8-x^3-8x+2x-28 = -x^3-x^2+6x = 0 \text{ sacamos factor común } (-x)$$

$$\Rightarrow -x\ (x^2+x-6)=0 \Rightarrow\ -x\ =\ 0\ \vee\ x^2+x-6=0 \Rightarrow \boxed{x=0}\ \vee\ x^2+x-6=0$$

$$x^2+x-6=0\ \therefore \text{ aplico } x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow \boxed{x_1=2} \\ \searrow \boxed{x_2=-3} \end{matrix} \Rightarrow \text{Solución}: \boxed{x_1=2} \wedge \boxed{x_2=-3} \wedge \boxed{x_3=0}$$

21) Sabiendo que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices cuadradas de orden tres, tales que **det (*A*) = 2** y **det (*B*) = 4**. Calcular aplicando propiedades:

a) $\det(3B^{-1})$ *b)* $\det(-2A^T B)$ *c)* $\det\left[\left(3B^T\right)^{-1}\right]$ *d)* $\det\left[B^{-1}.\left(A^T\right)^{-1}\right]$

$$a)\ \left|3B^{-1}\right| \underset{|kA| = k^n|A|}{=} 3^3\left|B^{-1}\right| \underset{|B^{-1}| = \frac{1}{|B|}}{=} 3^3 \cdot \frac{1}{|B|} = 27 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{4} \Rightarrow \boxed{\left|3B^{-1}\right| = \frac{27}{4}}$$

$$b)\ \left|-2A^T B\right| \underset{|kA| = k^n|A|}{=} (-2)^3 \cdot \left|A^T B\right| \underset{|A.B| = |A|.|B|}{=} (-2)^3 \cdot \left|A^T\right| . |B| \underset{|A| = |A^T|}{=} (-2)^3 |A| . |B| = -8 \cdot 2 \cdot 4 = -64 \Rightarrow \boxed{\left|-2A^T B\right| = -64}$$

$$c)\ \left|B^{-1}(A^T)^{-1}\right| \underset{|A.B| = |A|.|B|}{=} \left|B^{-1}\right| \cdot \left|(A^T)^{-1}\right| \underset{|B^{-1}| = \frac{1}{|B|}}{=} \frac{1}{|B|} \cdot \frac{1}{|A^T|} \underset{|A| = |A^T|}{=} \frac{1}{|B|} \cdot \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{\left|B^{-1}(A^T)^{-1}\right| = \frac{1}{8}}$$

$$d)\ \left|\left(3B^T\right)^{-1}\right| \underset{|B^{-1}| = \frac{1}{|B|}}{=} \frac{1}{\left|3B^T\right|} \underset{|kA| = k^n|A|}{=} \frac{1}{3^3\left|B^T\right|} \underset{|A| = |A^T|}{=} \frac{1}{3^3|B|} = \frac{1}{27 \cdot 4} = \frac{1}{108} \Rightarrow \boxed{\left|\left(3B^T\right)^{-1}\right| = \frac{1}{108}}$$

22) Sea $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tal que $|A| = -10$. Calcular usando propiedades:

$$a)\begin{vmatrix} 2a & d & g \\ 2b & e & h \\ 2c & f & i \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \underset{\text{trasponemos}}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2|A| = 2.(-10) = \boxed{-20}$$

Por propiedad $|A^T| = |A| = -10$

$$b)\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \end{vmatrix} \underset{①}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}}_{\substack{\text{la segunda y la tercera fila} \\ \text{son proporcionales, luego} \\ \text{el determinante es cero}}} + \underbrace{\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}}_{\substack{\text{dos permutaciones} \\ \text{para llegar a } |A|}} = 0 + (-1)(-1)\,|A| = \boxed{-10}$$

①Propiedad 11: aplicamos esta propiedad que dice: si todos los elementos de una linea(fila o columna) de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, entonces el determinante de la matriz es igual a la suma de dos determinantes que tienen en esa linea los primeros y los segundos sumandos, respectivamente y en las demás los mismos elementos que el determinante original.

$$c)\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ -2g+a & -2h+b & -2e+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ -2g & -2h & -2e \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}}_{\substack{F_2 = F_3\text{, luego el} \\ \text{determinante es cero}}} = (-2)\underbrace{\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & e \end{vmatrix}}_{\substack{\text{una permutación} \\ \text{para llegar a } |A|}} = (-2).(-1).|A| = (-2).(-1).(-10) = \boxed{-20}$$

23) Hallar $\alpha \in \Re$ que verifique $|AB| = -96$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ \alpha & -1 & 4 \\ 2 & \alpha & -2 \end{pmatrix}$

$$|AB| = -96 \quad \Rightarrow \quad |A||B| = -96 \quad \text{ya que } |AB| = |A||B|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1.(5+8) - 3.(-5+4) = 13 + 3 = 16 \Rightarrow \boxed{|A| = 16}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ \alpha & -1 & 4 \\ 2 & \alpha & -2 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ \alpha & -2 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} \alpha & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = 2.(2-4\alpha) + 2.(-2\alpha - 8) + 3.(\alpha^2 + 2) = \ 4 - 8\alpha - 4\alpha - 16 + 3\alpha^2 + 6 = 3\alpha^2 - 12\alpha - 6$$

$$\Rightarrow \boxed{|B| = 3\alpha^2 - 12\alpha - 6}$$

$$|A||B| = -96 \Rightarrow 16.(3\alpha^2 - 12\alpha - 6) = -96 \Rightarrow 3\alpha^2 - 12\alpha - 6 = -6 \Rightarrow 3\alpha^2 - 12\alpha = 0 \Rightarrow 3\alpha(\alpha - 4) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0 \vee \alpha = 4}$$

24) Hallar $\alpha \in \Re$ que verifique $|A + B| = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} -\alpha & 2 \\ 2\alpha & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} -\alpha & 2 \\ 2\alpha & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - 1 & 2 + \alpha \\ 2\alpha & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A + B| = 0 \Rightarrow |A + B| = \begin{vmatrix} -\alpha - 1 & 2 + \alpha \\ 2\alpha & 3 \end{vmatrix} = (-\alpha - 1).3 - 2\alpha.(2 + \alpha) = -3\alpha - 3 - 4\alpha - 2\alpha^2 \Rightarrow |A + B| = -2\alpha^2 - 7\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -3 \vee \alpha = -1/2}$$

25) Calcular el determinante de C sabiendo que $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&0\\2&3&4\end{pmatrix}$, $B,\ C\in\Re^{3\times3}$, $|B|=4$ y $|A^{-1}2BC^{T}|=-48$.

$$|A^{-1}2BC^{T}|=-48 \Rightarrow 2^{3}.|A^{-1}|.|B|.|C^{T}|=-48 \Rightarrow 2^{3}.\frac{1}{|A|}.|B|.|C|=-48 \quad (*)$$

Calculamos el $|A|$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&0\\2&3&4\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}-1&0\\3&4\end{vmatrix}-0.\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}2&3\\-1&0\end{vmatrix}=1.(-4)-0.(-1)+2.(3)=2 \Rightarrow \boxed{|A|=2}$$

Reemplazamos en $(*)$

$$2^{3}.\frac{1}{|A|}.|B|.|C|=-48 \Rightarrow 8.\frac{1}{2}.4.|C|=-48 \Rightarrow 16.|C|=-48 \Rightarrow |C|=-\frac{48}{16} \Rightarrow \boxed{|C|=-3}$$

26) Decidir si es verdadero o falso y justifique:

a) $|A+B|=|A|+|B|$, $A\in\Re^{nxn}$, $B\in\Re^{nxn}$

Esta proposición es falsa y lo demostramos con un contraejemplo

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=-3 \text{ y } B=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\Rightarrow|B|=\begin{vmatrix}2&5\\1&3\end{vmatrix}=1 \Rightarrow |A|+|B|=-3+1=-2 \Rightarrow \boxed{|A|+|B|=-2}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&7\\5&8\end{pmatrix}\Rightarrow|A+B|=\begin{vmatrix}3&7\\5&8\end{vmatrix}=-11\Rightarrow\boxed{|A+B|=-11} \Rightarrow \boxed{|A|+|B|\neq|A+B|}$$

b) Si A es una matriz inversible entonces $|A| = 0$

Por definición: **A es inversible** $\Rightarrow$ existe A^{-1} luego para que ello ocurra $|A| \neq 0$, entonces la proposición es falsa

c) Si A y B son inversibles, entonces $A.B$ también lo es, $A \in \Re^{nxn}$, $\mathbf{B} \in \Re^{nxn}$

Hipótesis:

A es inversible $\Rightarrow$ existe $A^{-1} \Rightarrow |A| \neq 0$

B es inversible $\Rightarrow$ existe $B^{-1} \Rightarrow |B| \neq 0$

Tesis:

$A.B$ es inversible $\Rightarrow |A\,.\,B| \neq 0$

Demostración:

$$|A\,.\,B| \underset{1}{=} |A|\,.\,|B| \underset{2}{\neq} 0$$

(1) Por propiedad del determinante de un producto.

(2) Por hipótesis, $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$ por lo tanto el producto también es distinto de cero.

d) $|A.A^T| = |A|^2, A \in \Re^{n\,x\,n}$

Hipótesis: $A \in \Re^{n \times n}$

Tesis: $|A.A^T| = \left(|A|\right)^2$

Demostración:

$$|A.A^T| \underset{1}{=} |A|.|A^T| \underset{2}{=} |A|.|A| \underset{3}{=} \left(|A|\right)^2$$

(1) El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes

(2) El determinante de una matriz y el de su traspuesta son iguales

(3) Por operatoria

Luego la proposición es verdadera

e) $|A| = \dfrac{1}{|A^{-1}|}$

Tesis:

$|A| = \dfrac{1}{|A^{-1}|}$

Hipótesis:

A es inversible $\Rightarrow$ existe $A^{-1} \Rightarrow |A| \neq 0$

Demostración:

Si la matriz es inversible, existe A^{-1}, por definición de matriz inversa $A \cdot A^{-1} = I$

Aplicando determinantes en ambos miembros $|A \cdot A^{-1}| = |I|$

Por $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ y $|I| = 1$ luego $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$

Por lo tanto como $|A| \neq 0 \wedge |A^{-1}| \neq 0$ entonces se verifica que $|A| = \dfrac{1}{|A^{-1}|}$

Luego la proposición es verdadera

f) Si $det(A) = det(B)$, entonces $A = B$

Esta proposición es falsa y lo demostramos con un contraejemplo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \quad \wedge \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 1$

Conclusión $|A| = |B| \not\Rightarrow A = B$

27) Hallar el valor de $x \in \Re$ que verifique: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ x & -1 & 1 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ x & -1 & 1 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ x & -2 \end{vmatrix} + x\cdot\begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = 2\cdot(2-x) + x\cdot(x^2) = 4 - 2x + x^3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ x & -1 & 1 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = 4 - 2x + x^3$$

y el determinante de orden 2 : $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -2x - 4$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ x & -1 & 1 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix} \Rightarrow$

$$4 - 2x + x^3 = -2x - 4$$
$$x^3 = -8$$
$$\boxed{x = -2}$$

28) Si A es una matriz triangular, señale condiciones necesarias y suficientes sobre A para que $\det(A) \neq 0$.

Matriz Triangular Superior : es toda matriz cuadrada A tal que : $\forall i, \forall j : i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Matriz Triangular Inferior : es toda matriz cuadrada A tal que : $\forall i, \forall j : i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Sea A una matriz triangular inferior

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad |A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn} \neq 0$$

La condición necesaria y suficiente para que el $|A| \neq 0$ es que ninguno de los elementos de la diagonal principal sea cero

29) Obtener, si existen, las inversas de:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}4&3\\12&9\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}4&6\\5&9\end{pmatrix}$$

a) Se puede observar que: $-C_1 = C_2 + C_3$ entonces $|A|=0$. Calculamos por Laplace:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{vmatrix}=1\cdot\underbrace{(-1)^{1+1}}_{(-1)^2=1}\underbrace{\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}}_{1.1-0.1=1}-1\cdot\underbrace{(-1)^{1+2}}_{(-1)^3=-1}\underbrace{\begin{vmatrix}0&-1\\-1&1\end{vmatrix}}_{0.1-(-1)(-1)=-1}=1\cdot(1)+1\cdot(-1)=1-1=0\ \Rightarrow |A|=0\ \Rightarrow\ \nexists\ A^{-1}$$

b)
$$|B|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&2\end{vmatrix}=1\cdot\underbrace{(-1)^{1+1}}_{(-1)^2=1}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&-1\\0&2\end{vmatrix}}_{\substack{1.2-0.(-1)=\\=2-0=2}}-1\cdot\underbrace{(-1)^{1+2}}_{(-1)^3=-1}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}0&-1\\-1&2\end{vmatrix}}_{\substack{0.2-(-1).(-1)=\\=0-1=-1}}=1\cdot1\cdot2-1\cdot(-1)(-1)=2-1=1\quad \text{luego } |B|=1\neq0\ \Rightarrow\ \exists\ B^{-1}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow AdjB=\begin{pmatrix}+(2)&-(-2)&+(1)\\-(-1)&+(2)&-(-1)\\+(1)&-(-1)&+(1)\end{pmatrix}\Rightarrow AdjB=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot AdjB=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{B^{-1}=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}}$$

c)

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|C|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2(4-1)+1(-2)=6-2=4\neq 0\Rightarrow |C|=4\neq 0\Rightarrow \exists C^{-1}$$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow C^{T}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow AdjC=\begin{pmatrix} +(3) & -(-2) & +(1) \\ -(-2) & +(4) & -(-2) \\ +(1) & -(-2) & +(3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ C^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{C^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}}$$

d)

$$D=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|D|=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 9 \end{vmatrix}=36-36=0\Rightarrow |D|=0\Rightarrow \nexists D^{-1}$$

e)

$$E=\begin{pmatrix}4&6\\5&9\end{pmatrix}$$

$$|E|=\begin{vmatrix}4&6\\5&9\end{vmatrix}=36-30=6\neq 0\Rightarrow \exists E^{-1}$$

$$E=\begin{pmatrix}4&6\\5&9\end{pmatrix}\Rightarrow E^{T}=\begin{pmatrix}4&5\\6&9\end{pmatrix}\Rightarrow AdjE=\begin{pmatrix}9&-6\\-5&4\end{pmatrix}\Rightarrow E^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}9&-6\\-5&4\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{E^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-1\\-\frac{5}{6}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}}$$

30) Indicar verdadero o falso. Justificar claramente la respuesta:

a) Si A y B son inversibles, entonces $A+B$ también lo es.

Esta proposición es falsa y lo demostramos con un contraejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}-1&2\\4&-5\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}-1&2\\4&-5\end{vmatrix}=-3\neq 0 \text{ entonces A es inversible} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1&-2\\-4&5\end{pmatrix}\Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}1&-2\\-4&5\end{vmatrix}=-3\neq 0 \text{ entonces B es inversible}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}-1&2\\4&-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-2\\-4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow |A+B|=\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow \boxed{A+B \text{ no es inversible}}$$

b) Si $\boldsymbol{A}$ es regular, entonces $\boldsymbol{\alpha.A}$ también lo es $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \Re$.

Esta proposición es falsa y lo demostramos con un contraejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1 \neq 0 \therefore \boldsymbol{A} \text{ es regular}$$

Si $\boldsymbol{\alpha} \in \Re \wedge \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, realizamos $\boldsymbol{\alpha.A} = \mathbf{0}.\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el $|\boldsymbol{\alpha.A}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow$ la matriz $\boldsymbol{\alpha.A}$ no es regular

<u>Observación</u>: La proposición es verdadera para $\boldsymbol{\alpha} \in \Re \wedge \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$

c) Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \Re^{nxn}$ son tales que $|\boldsymbol{A}|.|\boldsymbol{B}| = \mathbf{1}$, entonces $\boldsymbol{B}$ es la matriz inversa de $\boldsymbol{A}$.

Esta proposición es falsa y lo demostramos con un contraejemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 8 = 4 \neq 0 \therefore \boldsymbol{A} \text{ es inversible}$$

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Adj}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{A}^{-1}| = 1/4$$

Sin embargo $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{A}^{-1}$ y tiene como $|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} = 1/4$

Y reemplazando obtenemos $|\boldsymbol{A}|.|\boldsymbol{B}| = 4.1/4 = 1 \Rightarrow |\boldsymbol{A}|.|\boldsymbol{B}| = 1$

$|\boldsymbol{A}|.|\boldsymbol{B}| = 1 \quad \wedge \quad \mathbf{B} \neq \boldsymbol{A}^{-1}$

d) Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \Re^{nxn}$ son tales que $|\boldsymbol{A}|.|\boldsymbol{B}| = \mathbf{1}$, entonces $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son inversibles.

Si $|\boldsymbol{A}|.|\boldsymbol{B}| = \mathbf{1} \Rightarrow |\boldsymbol{A}|.|\boldsymbol{B}| \neq \mathbf{0} \Rightarrow |\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0} \wedge |\boldsymbol{B}| \neq \mathbf{0}$ o sea $\boldsymbol{A}$ es inversible y $\boldsymbol{B}$ es inversible.

La proposición es verdadera.

31) ¿Cuándo una matriz diagonal es inversible y cuál es su inversa?

Una matriz diagonal es inversible cuando todos los elementos de la diagonal son distintos de cero

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \Re^{n\times n} \wedge a_{ii} \neq 0 \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$$

32) Verificar que la matriz A es igual a su inversa. Siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}} \Rightarrow A^{T}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A)=\begin{pmatrix} +(-3) & -(4) \\ -(-2) & +(3) \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A)=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-9+8=\ -1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A)=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}} \text{ se verifica}$$

33) Indicar verdadero o falso, en caso de ser verdadero realizar la demostración:

a) $A.A^T = N \Rightarrow A = N$

<u>Hipótesis</u>: $A.A^T = N$

<u>Tesis</u>: $A = N$

<u>Demostración</u>

Para demostrar tomamos una matriz de 2x2, para luego generalizar a una matriz de orden n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}.a_{21} + a_{12}.a_{22} \\ a_{21}.a_{11} + a_{22}.a_{12} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}.a_{21} + a_{12}.a_{22} \\ a_{21}.a_{11} + a_{22}.a_{12} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Por igualdad de matrices

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 = 0 \quad (1) \\ a_{11}.a_{21} + a_{12}.a_{22} = 0 \\ a_{11}.a_{21} + a_{12}.a_{22} = 0 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$\rightarrow$ La única posibilidad que la suma de los cuadrados de dos números reales sea nula (1) y (2) es que cada uno de lo sea por lo tanto todos los elementos de la matriz A son nulos, de manera que se puede garantizar que $A = N$

Sea A de cualquier orden al multiplicarla por su traspuesta el resultado del producto siempre es una matriz cuadrada dónde se verificará lo anteriormente desarrollado al igualar el resultado de $A.A^T$ a la matriz nula.

Por lo tanto la afirmación es verdadera

b) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices cuadradas y además permutables, entonces $\boldsymbol{A.B}$ es idempotente.

<u>Hipótesis</u>:

$\boldsymbol{A} \in \Re^{nxn}$ y $\boldsymbol{B} \in \Re^{nxn}$

$\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son permutables $\Leftrightarrow \boldsymbol{A.B = B.A}$

<u>Tesis</u>:

$\boldsymbol{A.B}$ es idempotente : $\boldsymbol{A.B = (A.B)^2}$

<u>Demostración</u>: Partiendo de uno de los miembros de la tesis

$$\boldsymbol{(A.B)^2 \underset{1}{=} (A.B).(A.B) \underset{2}{=} A.(B.A).B \underset{3}{=} A.(A.B).B \underset{4}{=} (A.A).(B.B) \underset{5}{=} A^2.B^2}$$

1. Por definición de potenciación de matrices

2. Por asociatividad del producto de matrices

3. Por hipótesis $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son permutables

4. Por asociatividad del producto de matrices

5. Por definición de potenciación de matrices

Como $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no son idempotentes nos queda $\boldsymbol{A^2 . B^2 \neq A. B}$ entonces la proposición es falsa

c) Si $\boldsymbol{A}$ es idempotente y $\boldsymbol{B}$ es ortogonal, entonces $\boldsymbol{B^T.A.B}$ es idempotente.

Hipótesis :

$A \in \Re^{nxn}$, $B \in \Re^{nxn}$

A es idempotente $A^2 = A$

B es ortogonal $B^T = B^{-1}$

Tesis

$B^T.A.B$ es idempotente o sea debemos demostrar que

$$\left(B^T.A.B\right)^2 = B^T.A.B$$

Demostración : Partiendo de uno de los miembros de la tesis

$$\left(B^T.A.B\right)^2 \underset{1}{=} \left(B^T.A.B\right).\left(B^T.A.B\right) \underset{2}{=} B^T.A.(B.B^T).A.B \underset{3}{=} B^T.A.I.A.B \underset{4}{=}$$

$$\underset{4}{=} B^T.A.A.B \underset{5}{=} B^T.A^2.B \underset{6}{=} B^T.A.B$$

1. Por definición de potenciación de matrices.

2. Por asociatividad del producto de matrices.

3. Por datos B es ortogonal $B.B^T = I$

4. Por ser I elemento neutro de la multiplicación de matrices cuadradas

5. Por definición de potenciación de matrices.

6. Por datos A es idempotente $A^2 = A$

La afirmación es verdadera

d) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son ortogonales de igual orden, entonces $\boldsymbol{B.A}$ es ortogonal.

<u>Hipótesis</u> <u>Tesis</u>

$A^T = A^{-1} \wedge B^T = B^{-1}$ $\quad$ $(B.A)^T = (B.A)^{-1}$

<u>Demostración</u>

$(B.A)^T = (B.A)^{-1}$

$(B.A)^T = A^{-1}.B^{-1}$ porque $(B.A)^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$

$(B.A)^T = A^T.B^T$ por hipótesis ya que $A^T = A^{-1} \wedge B^T = B^{-1}$

$(B.A)^T = (B.A)^T$ porque $A^T.B^T = (B.A)^T$

Al llegar a una identidad hemos probado que la tesis es verdadera

e) Si $\boldsymbol{A}$ es no singular y $\boldsymbol{B.A = N}$, entonces $\boldsymbol{B = N}$

<u>Hipótesis</u> <u>Tesis</u>

A es no singular $\Rightarrow \exists A^{-1}$ $\quad$ $B = N$

$B.A = N$

<u>Demostración :</u>

$B.A = N$ Partimos de los datos

$B.\left(A.A^{-1}\right) = N.A^{-1}$ Multiplicamos por A^{-1} MaM por derecha, aplicamos propiedad asosciativa

$B.I = N$ Por definicicón de matriz inversa

$B = N$

Llegamos a lo que se quería demostrar

f) Si $A \ y \ B \in \Re^{nxn}$ son regulares, entonces $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Hipótesis:

$A \in \Re^{nxn}, B \in \Re^{nxn}$

A es regular $\Rightarrow \exists \ A^{-1}$

B es regular $\Rightarrow \exists \ B^{-1}$

Tesis

$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Demostración:

$(A.B).(A.B)^{-1} = I$	Por definición de matriz inversa
$A^{-1}.(A.B).(A.B)^{-1} = A^{-1}.I$	Premultiplicando ambos miembros por A^{-1}
$I.B.(A.B)^{-1} = A^{-1}$	Por asociativa, elemento neutro y matriz inversa
$B.(A.B)^{-1} = A^{-1}$	Por definición de elemento neutro
$B^{-1}.B.(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$	Premultiplicando ambos miembros por B^{-1}
$I.(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$	Por definición de matriz inversa, asociatividad
$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$	Por definición de elemento neutro

34) ¿Qué valores de α hacen que la matriz $\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$ no sea inversible?

$\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$ es inversible si y solo si su determinante es ***distinto de cero***

Desarrollamos el determinante por la primera fila e igualamos a cero

$$\begin{vmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\alpha)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \alpha+3 & \alpha+7 \end{vmatrix} - (\alpha-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+7 \end{vmatrix} + (\alpha+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2-\alpha & \alpha+3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-\alpha)\cdot\left[2(\alpha+7)-3(\alpha+3)\right]-(\alpha-1)\cdot\left[1(\alpha+7)-3(2-\alpha)\right]+(\alpha+1)\cdot\left[1(\alpha+3)-2(2-\alpha)\right]=$$

$$=(-\alpha)[-\alpha+5]-(\alpha-1)[4\alpha+1]+(\alpha+1)[3\alpha-1]=\alpha^2-5\alpha-4\alpha^2-\alpha+4\alpha+1+3\alpha^2-\alpha+3\alpha-1=0$$

$\forall\, \alpha \in \Re$, la matriz no tiene inversa ya que cualquiera sea α el determinante siempre es nulo

Luego $\nexists \alpha \in \Re$ para que la matriz sea inversible

35) Calcular el valor de $x \in \Re$ para que exista A^{-1}, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2-x & -3 & 6 \\ 4 & 1+x & -2 \\ 2 & -1 & 2+x \end{pmatrix}$$

$\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$, calculamos el determinante de A por la primera fila

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-x & -3 & 6 \\ 4 & 1+x & -2 \\ 2 & -1 & 2+x \end{vmatrix} = (2-x).\begin{vmatrix} 1+x & -2 \\ -1 & 2+x \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2+x \end{vmatrix} + 6.\begin{vmatrix} 4 & 1+x \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)\left[(1+x)(2+x)-2\right] + 3\left[4(2+x)+4\right] + 6\left[-4-2(1+x)\right] = (2-x)\left[2+x+2x+x^2-2\right] + 3\left[8+4x+4\right] + 6\left[-4-2-2x\right] =$$

$$= (2-x)\left[3x+x^2\right] + 3\left[4x+12\right] + 6\left[-2x-6\right] = 6x+2x^2-3x^2-x^3 \cancel{+12x} \cancel{+36} \cancel{-12x} \cancel{-36} = -x^3-x^2+6x = -x(x^2+x-6) = -x(x-2)(x+3)$$

$$\Rightarrow |A| = -x(x-2)(x+3)$$

$$\Rightarrow \boxed{|A| = -x(x-2)(x+3)} \Rightarrow \boxed{\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow x \neq -3 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2}$$

Resolucion de la cuadratica $x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2.1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$ $\nearrow \dfrac{-1+5}{2} = 2$ $\searrow \dfrac{-1-5}{2} = -3$

36) Si el rango de una matriz cuadrada de orden n es $k \,/\, k < n$, indique cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta, justificando la respuesta:

a) $|A| = k$

b) $|A| = 0$ **Respuesta correcta**

c) $|A| = k-1$

d) **ninguna de las anteriores**

37) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular **x** de modo que el rango de ***A*** sea **2**.

$|A| \neq 0 \;\Rightarrow\; r(A) = 3$ $\qquad\qquad |A| = 0 \;\Rightarrow\; r(A)$ no es 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(1-2x) - 1\cdot(-1-x) + (-1)\cdot(-1-2) = 2 - 4x + 1 + x + 3 = -3x + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Cuando $x = 2$ el $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\wedge\; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ luego $\boxed{r(A) = 2}$

b) Hallar la matriz ***adj A*** (para el valor de ***x*** encontrado).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A = \begin{pmatrix} +(-3) & -(+3) & +(+3) \\ -(-3) & +(+3) & -(+3) \\ +(-3) & -(+3) & +(+3) \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Adj\ A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}}$$

c) ¿A qué es igual el producto ***A.adj A***?

$$A.Adj\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se cumple $A.Adj\ A = |A|.I$
Como $|A| = 0$ entonces
$A.Adj\ A = 0.I = N$

38) Determinar los rangos de:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad c)\ C = I \in \Re^{nxn} \qquad d)\ D = N \in \Re^{nxn}$$

$$a)\ \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & (1) & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} (-1)\cdot F_3 \approx \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & (1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

$$b)\ \begin{pmatrix} (1) & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & (1) & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} 1/4\cdot F_3 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & (1) & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(B) = 4$$

$c)\ C = I \in \Re^{n\,x\,n} \Rightarrow |\,C\,| = 1 \neq 0 \Rightarrow r(C) = n$

$d)\ D = N \in \Re^{n\,x\,n} \Rightarrow |D| = 0$ y todos sus coeficientes son nulos $\Rightarrow r(D) = 0$

39) Dada la siguiente matriz de insumo producto, Obtenga el valor total de los otros costos de producción que ello implica.

Industrias	A	B	DF	PT
A	200	500	500	1200
B	400	200	900	1500
VA	600	800	1400	------
PT	1200	1500	------	2700

a) Determinar la matriz de producción si la demanda final cambia a **600** para ***A*** y a **805** para ***B***.
b) Obtener el valor total de los otros costos de producción que ello implica.
c) Indicar qué hipótesis de proporcionalidad se considera.

Usamos la matriz de Leontieff $\Rightarrow (I-A)^{-1}.H = X$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{200}{1200} & \frac{500}{1500}\\ \frac{400}{1200} & \frac{200}{1500}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{15}\end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix}600\\805\end{pmatrix} \qquad I-A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{15}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{13}{15}\end{pmatrix} \qquad (I-A)^{-1}=\frac{1}{\Delta(I-A)}\operatorname{Adj}(I-A)$$

$$|I-A|=\begin{vmatrix}\frac{5}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{13}{15}\end{vmatrix}=\frac{5}{6}\cdot\frac{13}{15}-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{18}$$

$$\text{Calculamos } (I-A)^{T}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{13}{15}\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Adj}(I-A)=\begin{pmatrix}+\left(\frac{13}{15}\right) & -\left(-\frac{1}{3}\right)\\ -\left(-\frac{1}{3}\right) & \frac{5}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{13}{15} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{11/18}\begin{pmatrix}\frac{13}{15} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{13}{15}\cdot\frac{18}{11} & \frac{1}{3}\cdot\frac{18}{11}\\ \frac{1}{3}\cdot\frac{18}{11} & \frac{5}{6}\cdot\frac{18}{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{78}{55} & \frac{6}{11}\\ \frac{6}{11} & \frac{15}{11}\end{pmatrix}\Rightarrow (I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{78}{55} & \frac{6}{11}\\ \frac{6}{11} & \frac{15}{11}\end{pmatrix}\Rightarrow (I-A)^{-1}\cdot H=\begin{pmatrix}\frac{78}{55} & \frac{6}{11}\\ \frac{6}{11} & \frac{15}{11}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}600\\805\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1290\\1425\end{pmatrix}}$$

	A	*B*	*DF*	*PT*
A	$b_{11}=a_{11}.X_1=\frac{1}{6}.1290=215$	$b_{12}=a_{12}.X_2=\frac{1}{3}.1425=475$	600	1290
B	$b_{21}=a_{21}.X_1=\frac{1}{3}.1290=430$	$b_{22}=a_{22}.X_2=\frac{2}{15}.1425=190$	805	1425
VA	$1290-(215+430)=645$	$1425-(475+190)=760$	$600+805=1405$	$\cdots$
PT	1290	1425	$\cdots$	$1290+1425=2715$

40) En una economía hipotética de dos industrias $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, la matriz de los coeficientes tecnológicos es $A=\begin{pmatrix}1/4 & 1/2\\ 1/3 & 1/6\end{pmatrix}$. Indicar la producción de cada industria si la demanda final es de **100** unidades para $\boldsymbol{A}$ y **80** para $\boldsymbol{B}$

Usamos la matriz de Leontieff $\Rightarrow (I-A)^{-1}.H = X$

$$A=\begin{pmatrix}1/4 & 1/2\\ 1/3 & 1/6\end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix}100\\ 80\end{pmatrix} \qquad I-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6}\end{pmatrix} \qquad (I-A)^{-1}=\frac{1}{\Delta(I-A)}\mathrm{Adj}(I-A)$$

$$|I-A|=\begin{vmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6}\end{vmatrix}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{24}$$

$$(I-A)^{T}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6}\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(I-A)=\begin{pmatrix}+\left(\frac{5}{6}\right) & -\left(-\frac{1}{2}\right)\\ -\left(-\frac{1}{3}\right) & +\left(\frac{3}{4}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4}\end{pmatrix} \Rightarrow (I-A)^{-1}=\frac{1}{11/24}\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\cdot\frac{24}{11} & \frac{1}{2}\cdot\frac{24}{11}\\ \frac{1}{3}\cdot\frac{24}{11} & \frac{3}{4}\cdot\frac{24}{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{20}{11} & \frac{12}{11}\\ \frac{8}{11} & \frac{18}{11}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{20}{11} & \frac{12}{11}\\ \frac{8}{11} & \frac{18}{11}\end{pmatrix} \Rightarrow (I-A)^{-1}\cdot H=\begin{pmatrix}\frac{20}{11} & \frac{12}{11}\\ \frac{8}{11} & \frac{18}{11}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}100\\ 80\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}269,09\\ 203,63\end{pmatrix}}\sim\boxed{\begin{pmatrix}269\\ 204\end{pmatrix}}$$

269 para la industria A y 204 para la industria B (en forma aproximada)

41) Dada la matriz de insumo producto correspondiente a un determinado año.

Industrias	A	B	DF	PT
A	**80**	**88**	**32**	**200**
B	**80**	**0**	**30**	**110**
VA	**40**	**22**	**62**	**-----**
PT	**200**	**110**	**-----**	**310**

a) construir la del año **"t"** en que el vector demanda final es: $\mathbf{DF}=\begin{pmatrix}42\\28\end{pmatrix}$

b) indicar en qué paso de la resolución del problema se asume que la adquisición de productos intermedios de una industria es proporcional al nivel del producto final de la misma.

Usamos la matriz de Leontieff $(I-A)$ y resolvemos $(I-A)^{-1}.H=X$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{80}{200} & \frac{88}{110}\\ \frac{80}{200} & 0\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}42\\28\end{pmatrix}\quad X=?\quad (I-A)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\\ \frac{2}{5}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\ -\frac{2}{5}&1\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{(I-A)=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\ -\frac{2}{5}&1\end{pmatrix}}\qquad (I-A)^{-1}=\frac{1}{\Delta(I-A)}Adj(I-A)$$

$$(I-A)=\begin{vmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\ -\frac{2}{5}&1\end{vmatrix}=\frac{3}{5}.1-\left(-\frac{4}{5}\right).\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{7}{25}$$

$$(I-A)^{T}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}\\ -\frac{4}{5}&1\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(I-A)=\begin{pmatrix}+(1)&-\left(-\frac{4}{5}\right)\\ -\left(-\frac{2}{5}\right)&+\left(\frac{3}{5}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{4}{5}\\ \frac{2}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\Rightarrow (I-A)^{-1}=\frac{1}{7/25}\begin{pmatrix}1&\frac{4}{5}\\ \frac{2}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.\frac{25}{7}&\frac{4}{5}.\frac{25}{7}\\ \frac{2}{5}.\frac{25}{7}&\frac{3}{5}.\frac{25}{7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{25}{7}&\frac{20}{7}\\ \frac{10}{7}&\frac{15}{7}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{25}{7}&\frac{20}{7}\\ \frac{10}{7}&\frac{15}{7}\end{pmatrix}\qquad \Rightarrow\ (I-A)^{-1}.H=X\ \Rightarrow \begin{pmatrix}\frac{25}{7}&\frac{20}{7}\\ \frac{10}{7}&\frac{15}{7}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}42\\28\end{pmatrix}=X\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{25}{7}.42+\frac{20}{7}.28\\ \frac{10}{7}.42+\frac{15}{7}.28\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}230\\120\end{pmatrix}}$$

	A	*B*	*DF*	*PT*
A	$\frac{2}{5}.230\ =\ 92$	$\frac{4}{5}.120\ =\ 96$	42	230
B	$\frac{2}{5}.230\ =\ 92$	$0.120\ =\ 0$	28	120
VA	$230-(92+92\ )=\ 46$	$120-(96+0)=24$	$42+28=70$	$\cdots$
PT	230	120	$\cdots$	$230+120=350$

42) Una economía hipotética simple de dos industrias ***A*** y ***B*** está representada en la siguiente tabla (los datos están dados en millones de pesos de productos):

	A	B	DF	PT
A	150	240	210	600
B	200	120	160	480

Determinar el valor del producto final para la economía si la demanda final cambia:

a) a **100** para **A** y a **200** para **B**

Usamos la matriz de Leontieff $\quad (I-A)^{-1}.\,H = X$

	A	*B*	*DF*	*PT*
A	150	240	210	600
B	200	120	160	480
VA	$600-(150+200)=250$	$480-(240+120)=120$	370	…
PT	600	480	…	$600+480=1080$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{150}{600} & \frac{240}{480}\\ \frac{200}{600} & \frac{120}{480}\end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix} \qquad I-A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(I-A)=\begin{vmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3}&\frac{3}{4}\end{vmatrix}=\frac{3}{4}\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\frac{1}{3}=\frac{19}{48}\\[2ex] (I-A)^{T}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(I-A)=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow (I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{36}{19}&\frac{24}{19}\\ \frac{16}{19}&\frac{36}{19}\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{36}{19}&\frac{24}{19}\\ \frac{16}{19}&\frac{36}{19}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{36}{19}100+\frac{24}{19}200\\ \frac{16}{19}100+\frac{36}{19}200\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}442{,}10\\463{,}16\end{pmatrix}}$$

b) a **50** para **A** y a **60** para **B**

Usamos los resultados obtenidos en *a)* $\quad (I-A)^{-1}.H = X$

$$\begin{pmatrix}\frac{36}{19}&\frac{24}{19}\\ \frac{16}{19}&\frac{36}{19}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}50\\60\end{pmatrix}=X\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{36}{19}50+\frac{24}{19}60\\ \frac{16}{19}50+\frac{36}{19}60\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}170{,}53\\155{,}79\end{pmatrix}}$$