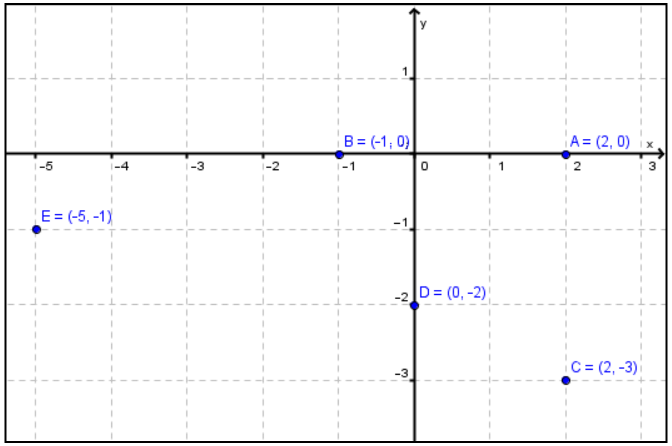
UNIDAD TEMÁTICA 1
VECTORES, RECTA Y PLANO

1) ***a)*** Representar en el plano los puntos: $A=(2;0)$, $B=(-1;0)$, $C=(2;-3)$, $D=(0;-2)$, $E=(-5;-1)$



b) Considerando los puntos anteriores, calcular las coordenadas de:

i. $-2B$ ***ii.*** $C+D$ ***iii.*** $\frac{1}{2}E-A$ ***iv.*** $2A-D+3C$

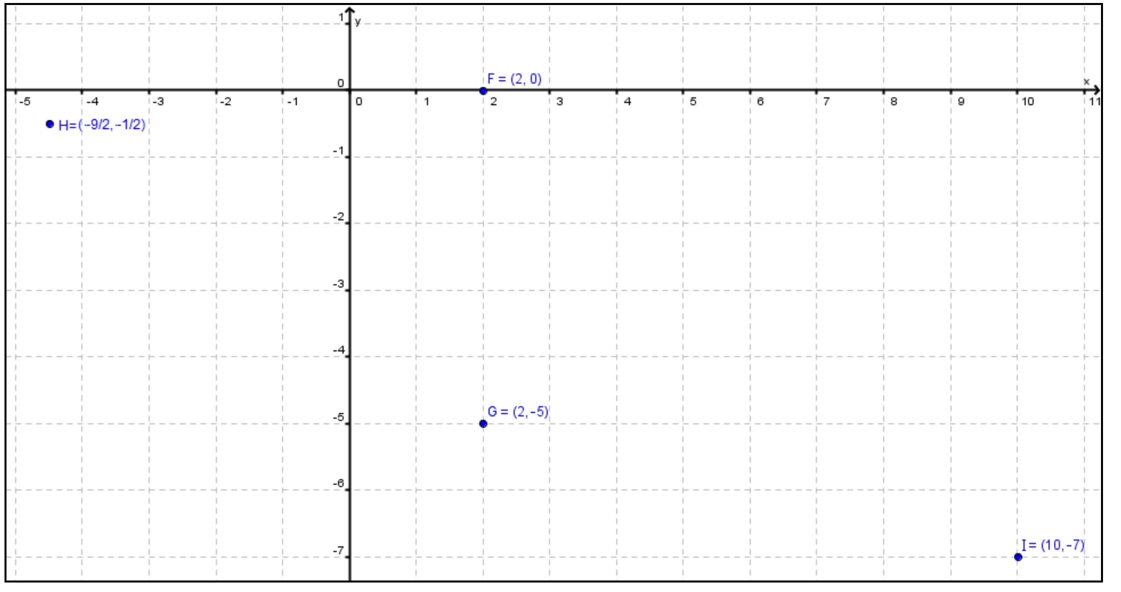
i. $F=-2B=-2(-1;0)=\boxed{(2;0)}$

ii. $G=C+D=(2;-3)+(0;-2)=\boxed{(2;-5)}$

iii. $H=\frac{1}{2}E-A=\frac{1}{2}(-5;-1)-(2;0)=\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)-(2;0)=\boxed{\left(-\frac{9}{2};-\frac{1}{2}\right)}$

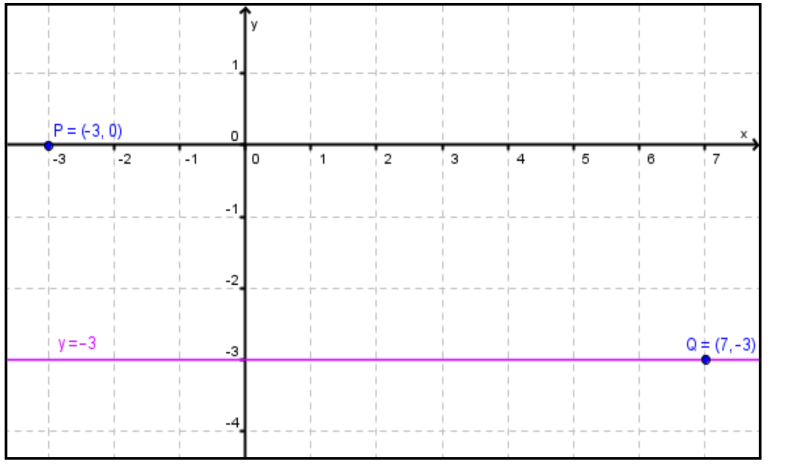
iv. $I=2A-D+3C=2(2;0)-(0;-2)+3(2;-3)=(4;0)-(0;-2)+(6;-9)=\boxed{(10;-7)}$

c) Representar en el plano los puntos hallados en ***b)***



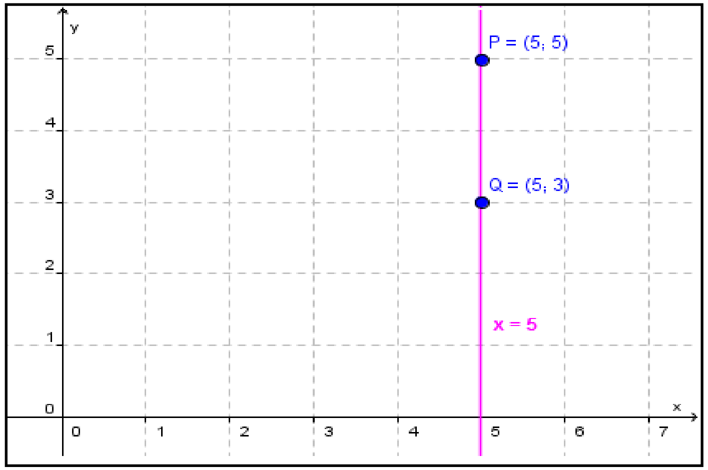
2) Representar los siguientes conjuntos en el plano e indicar si los puntos dados pertenecen a ellos:

a) $A=\left\{\left(x;y\right)\in\Re^2\,/\,y=-3\right\}$ $\quad P=\left(-3;0\right)\quad Q=\left(7;-3\right)$



$$P=\left(-3;0\right)\notin A$$
$$Q=\left(7;-3\right)\in A$$

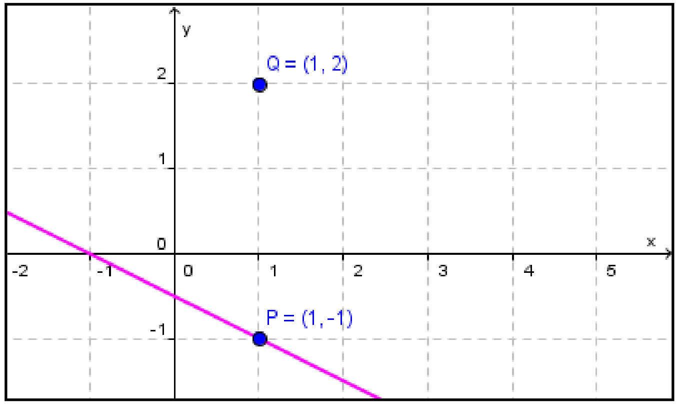
b) $B = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, x = 5 \right\}$ $\quad P = (5;5) \quad Q = (5;3)$



$P = (5;5) \in B$

$Q = (5;3) \in B$

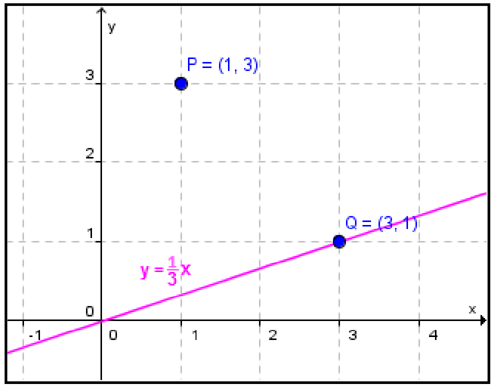
c) $C = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, x + 2y = -1 \right\}$ $\quad P = (1;-1) \quad Q = (1;2)$



$P = (1;-1) \in C$

$Q = (1;2) \notin C$

d) $D = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, y = \frac{1}{3} x \right\}$ $\quad P = (1;3) \quad Q = (3;1)$



$P = (1;3) \notin D$

$Q = (3;1) \in D$

3) Dados $A=(1;0;-2)$ $\quad B=(2;1;3)$ $\quad C=(-1;2;-3)$, calcular:

a) $A-2B$

$$A-2B=(1;0;-2)-2(2;1;3)=(1;0;-2)-(4;2;6)=(-3;-2;-8)\Rightarrow \boxed{A-2B=(-3;-2;-8)}$$

b) $B-2(A+C)$

$$B-2(A+C)=(2;1;3)-2\left[(1;0;-2)+(-1;2;-3)\right]=(2;1;3)-2(0;2;-5)=$$
$$=(2;1;3)-(0;4;-10)=(2;-3;13)\Rightarrow \boxed{B-2(A+C)=(2;-3;13)}$$

c) $\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}B-\frac{1}{8}C$

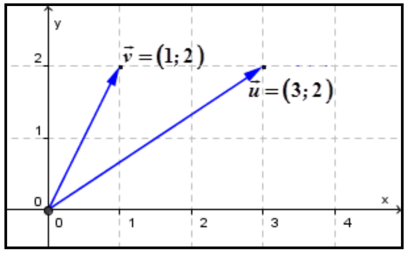
$$\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}B-\frac{1}{8}C=\frac{1}{2}(1;0;-2)+\frac{1}{4}(2;1;3)-\frac{1}{8}(-1;2;-3)=$$
$$=\left(\frac{1}{2};0;-1\right)+\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{1}{8};\frac{1}{4};-\frac{3}{8}\right)=\left(\frac{9}{8};0;\frac{1}{8}\right)\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}B-\frac{1}{8}C=\left(\frac{9}{8};0;\frac{1}{8}\right)}$$

d) $2A-B+C$

$$2A-B+C=2(1;0;-2)-(2;1;3)+(-1;2;-3)=(2;0;-4)-(2;1;3)+(-1;2;-3)=(-1;1;-10)$$
$$\Rightarrow \boxed{2A-B+C=(-1;1;-10)}$$

4) Dados los vectores de $\Re^2$: $\vec{u}=(3;2)$ y $\vec{v}=(1;2)$

a) Representarlos gráficamente



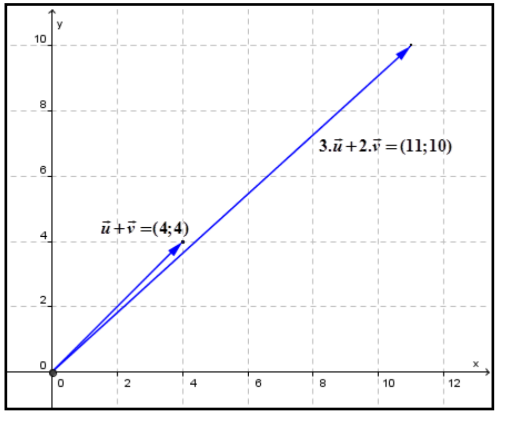
b) Hallar $\vec{u}+\vec{v}$, siendo **"+"** la suma usual, tal que $(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$

$\vec{u}+\vec{v}=(3;2)+(1;2)=\boxed{(4;4)}$

c) Hallar $3\vec{u}+2\vec{v}$ siendo "**.**" a multiplicación por un escalar usual, tal que $\alpha.(a;b)=(\alpha a;\alpha b)$

$3.\vec{u}+2.\vec{v}=3.(3;2)+2.(1;2)=(9;6)+(2;4)=\boxed{(11;10)}$

d) Representar gráficamente los vectores obtenidos en ***b)*** y ***c)***.



5) Escribir en forma explícita:

a) El neutro para la suma en $\Re^3$: $\boxed{\vec{0}=(0;0;0)}$

b) El inverso aditivo de $(1;2;-3;5)\in\Re^4$: $\boxed{(-1;-2;3;-5)\in\Re^4}$

c) El inverso aditivo del inverso aditivo de un vector $\vec{v}\in\Re^n$:

Recordar que inverso aditivo es equivalente a "opuesto" $\vec{v}=(v_1;v_2;\ldots;v_n)\Rightarrow-\vec{v}=(-v_1;-v_2;\ldots;-v_n)\Rightarrow-(-\vec{v})=\boxed{(v_1;v_2;\ldots;v_n)}$

d) El inverso aditivo del neutro para la suma en $\Re^n$: $\boxed{\vec{0}=(0;0;\ldots;0)}$

e) El vector $(1;1;1)+(3;2;2)$ en $\Re^3$: $\boxed{(4;3;3)\in\Re^3}$

f) La propiedad conmutativa para la suma de vectores en $\Re^3$:

$\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ y $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$

La adición es conmutativa $\Leftrightarrow$ $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1;u_2;u_3)+(v_1;v_2;v_3)\underset{1}{=}(u_1+v_1;u_2+v_2;u_3+v_3)\underset{2}{=}(v_1+u_1;v_2+u_2;v_3+u_3)\underset{3}{=}(v_1;v_2;v_3)+(u_1;u_2;u_3)=\vec{v}+\vec{u}$$

(1) por definición de adición de vectores

(2) por propiedad conmutativa de la adición de los números reales

(3) por definición de adición de vectores

g) La suma del inverso aditivo de $(1;1)$ con **5** veces el vector $(4;5)$ en $\Re^2$:

$$-(1;1)+5(4;5)=(-1;-1)+(20;25)=\boxed{(19;24)}$$

h) El vector $3.(1;1;8)+4.\left[(-2;3;0)+5.(1;0;1)\right]$ en $\Re^3$:

$$3.(1;1;8)+4.[(-2;3;0)+5.(1;0;1)]=(3;3;24)+4.[(-2;3;0)+(5;0;5)]=(3;3;24)+4.(3;3;5)=(3;3;24)+(12;12;20)=\boxed{(15;15;44)}$$

i) El vector de $\Re^3$ que sumado al inverso aditivo del vector $(1;-4;6)$ da por resultado el vector $3.(3;4;2)$:

$$(x_1;x_2;x_3)+(-1;4;-6)=3.(3;4;2) \Rightarrow (x_1-1\,;\,x_2+4\,;x_3-6)=(9;12;6)\Rightarrow \begin{cases} x_1-1=9 \Rightarrow x_1=10 \\ x_2+4=12 \Rightarrow x_2=8 \\ x_3-6=6 \Rightarrow x_3=12 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(x_1;x_2;x_3)=(10;8;12)}$$

6) En cada caso representar geométricamente el vector $\overrightarrow{PQ}$, hallar sus componentes y calcular su norma o módulo.

a) $P=(1;2)$ $Q=(5;5)$ $\qquad |\vec{u}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(5;5)-(1;2)=(4;3)\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{PQ}=(4;3)},\quad |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5\therefore \boxed{|\overrightarrow{PQ}|=5}$$

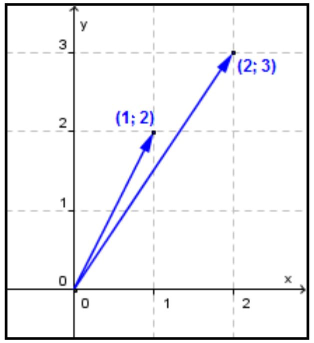
b) $P=(10;2)$ $Q=(-6;-1)$

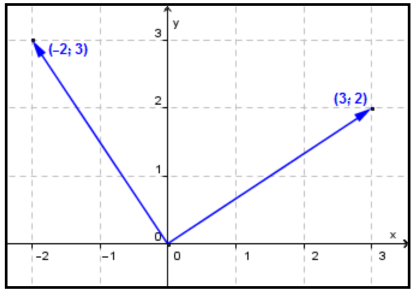
$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-6;-1)-(10;2)=(-16;-3)\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{PQ}=(-16;-3)},\quad |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(-16)^2+(-3)^2}=\sqrt{265}\therefore \boxed{|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{265}}$$

c) $P=(3;-5)$ $Q=(4;7)$

$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(4;7)-(3;-5)=(1;12)\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{PQ}=(1;12)},\quad |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{1^2+12^2}=\sqrt{1+144}=\sqrt{145}\therefore \boxed{|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{145}}$$

7) Calcular:

a)


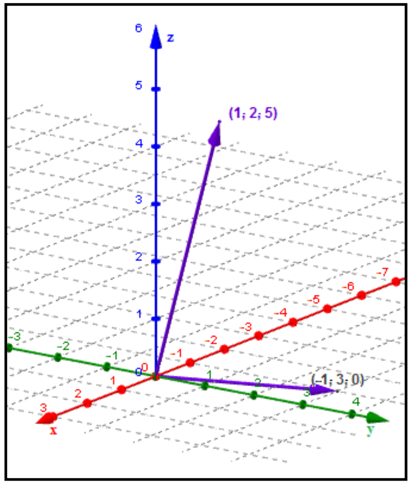
b)


a) $\left(2;3\right).\left(1;2\right)$ en $\Re^2$, represente gráficamente los vectores.

$\left(2;3\right).\left(1;2\right)= 2.1+3.2=2+6=\boxed{8}$

b) $\left(-2;3\right).\left(3;2\right)$ en $\Re^2$, represente gráficamente los vectores.

$(-2;3).\left(3;2\right)=(-2).3+3.2=-6+6=\boxed{0}$

c)


c) $\left(1;2;5\right).\left(-1;3;0\right)$ en $\Re^3$, represente gráficamente los vectores.

$\left(1;2;5\right).(-1;3;0)=1.(-1)+2.3+5.0=-1+6+0=\boxed{5}$

d) $\left(1;0;4;5\right).\left(0;2;0;0\right)$ en $\Re^4$.

$\left(1;\ 0;\ 4;\ 5\right).\left(0;\ 2;\ 0;0\right)=1.0+0.2+4.0+5.0=\boxed{0}$

e) $\left(19;32;7\right).\left(0;0;0\right)$ en $\Re^3$.

$\left(19;\ 32;7\right).\left(0;\ 0;\ 0\right)=19.0+32.0+7.0=\boxed{0}$

8) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\Re^{n}$. Indicar verdadero o falso, justificando:

a) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

$\vec{u} = (u_1;u_2;\ldots;u_n)$ y $\vec{v} = (v_1;v_2;\ldots;v_n)$

El producto escalar es conmutativo $\Leftrightarrow$ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

$$\vec{u}.\vec{v} = (u_1;u_2;\ldots;u_n)\times(v_1;v_2;\ldots;v_n) \overset{1}{=} (u_1v_1+u_2v_2+\ldots+u_nv_n) \overset{2}{=} (v_1u_1+v_2u_2+\ldots+v_nu_n) \overset{3}{=} (v_1;v_2;\ldots;v_n).(u_1;u_2;\ldots;u_n) = \vec{v}.\vec{u}$$

(1) por definición de producto escalar de vectores

(2) por propiedad conmutativa de la multiplicación de los números reales

(3) por definición de producto escalar de vectores

b) $\vec{u} = \vec{0}$ *ó* $\vec{v} = \vec{0} \rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

- $\vec{u} = \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$

  $$\vec{0}.\vec{v} = (0;0;\ldots;0).(v_1;v_2;\ldots;v_n) \underset{1}{=} 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n = 0$$

  (1) por definición de producto escalar de vectores

- $\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

  $$\vec{u}.\vec{0} = (u_1;u_2;\ldots;u_n).(0;0;\ldots;0) \underset{1}{=} u_1 0 + u_2 0 + \ldots + u_n 0 = 0$$

  (1) por definición de producto escalar de vectores

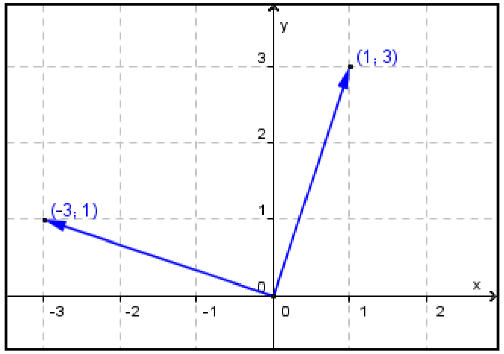
c) $\vec{u}.\vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ *ó* $\vec{v} = \vec{0}$

Contraejemplo: $\vec{u} = (1;1;0) \in \Re^3 \wedge \vec{v} = (-1;1;0) \in \Re^3 \rightarrow \vec{u}.\vec{v} = (1;1;0).(-1;1;0) \underset{1}{=} -1+1+0 = 0$

(1) Por definición de producto escalar

9) Dados los vectores $(1;3)$ y $(-3;\ 1)$ *de* $\Re^2$

a) Representarlos gráficamente. ¿Qué ángulo forman entre ellos?



Los vectores forman un ángulo de 90º

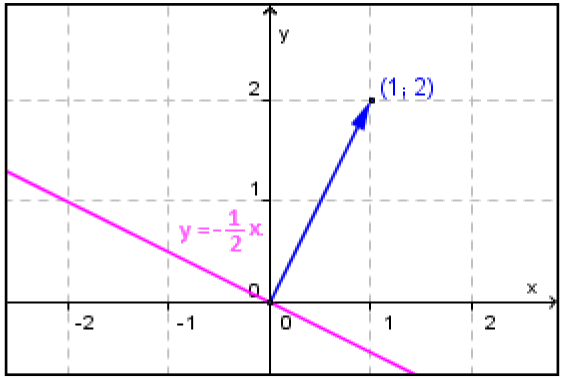
b) Verificar que su producto escalar es igual a **0**. ¿Cómo se llaman estos vectores?

$(1;3).(-3;1) = 1.(-3) + 3.1 = -3 + 3 = 0$ Los vectores se denominan ***ortogonales***

c) Hallar un vector $(x;\ y) \in \Re^2$ tal que $(x;y).(1;2) = 0$ y represéntelo gráficamente.
¿Es única la solución?

$(x;y).(1;2) = x + 2y = 0 \ \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x$

Existen infinitas soluciones : $(-2;1), (-20;10), (-6;3), (2;-1)\ldots$



10) El valor de x, para que el vector opuesto al vector $\vec{v}=(4;-1;5)$ sea ortogonal al vector $\vec{u}=(x;-2;2)$ es:

a) $x=4$ *b)* $x=0$ *c)* $x=-3$ *d)* **Ninguna de las anteriores**

$\vec{u}.\vec{v}=(x;-2;2).(4;-1;5)=\ 4x+2+10=0 \Rightarrow 4x+12=0 \Rightarrow \boxed{x=-3}$ Respuesta correcta *c)*

11) Determinar si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos cosas:

a) $\vec{u}=\vec{i}-3\vec{j} \qquad \vec{v}=3\vec{i}-\vec{j}$

$\vec{u}=\vec{i}-3\vec{j} \ \rightarrow \vec{u}=(1;-3) \qquad \vec{v}=3\vec{i}-\vec{j} \ \rightarrow \ \vec{v}=(3;-1)$

$\vec{u}=(1;-3)$ no es proporcional a $\vec{v}=(3;-1)$ o sea $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v}=(1;-3).(3;-1)=1.3+(-3).(-1)=3+3=6\neq 0 \therefore \vec{u} \not\perp \vec{v}$

b) $\vec{u}=(6;-4) \quad \vec{v}=(-3;2)$

$\vec{u}=(6;-4)$ es proporcional a $\vec{v}=(-3;2)$ ya $(6;-4)=2(-3;2) \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$

c) $\vec{u}=(1;2;-3) \quad \vec{v}=(3;0;1)$

$\vec{u}.\vec{v}=(1;2;-3).(3;0;1)=1.3+2.0+(-3).1=3+0-3=0 \ \therefore \ \vec{u} \perp \vec{v}$

d) $\vec{u}=(-1;1;3) \quad \vec{v}=(2;-2;4)$

$\vec{u}=(-1;1;3)$ no es proporcional a $\vec{v}=(2;-2;4)$ o sea $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v}=(-1;1;3).(2;-2;4)=(-1).2+1.(-2)+3.4=-2-2+12=8\neq 0 \therefore \vec{u} \not\perp \vec{v}$

12) Una empresa fabrica tres productos $\mathbf{P_1, P_2}$ y $\mathbf{P_3}$ cuyos costos de producción son **\$30**, **\$40** y **\$50** respectivamente, el número de unidades producidas para cada producto es **120**, **140**, **95**. Si se sabe que el vector de precios es $\overrightarrow{v_p} = (45;50;60)$

Hallar el beneficio que puede obtener la empresa.

Calculamos la diferencia entre el vector precio de venta y el vector costo de producción $\vec{v}_p - \vec{v}_C = (45;50;60) - (30;40;50) = (15;10;10)$

Beneficio $= (\overrightarrow{v_p} - \overrightarrow{v_C}) \cdot \vec{q} = (15;10;10).(120;140;95) = 15.120 + 10.140 + 10.95 = 4150 \;\therefore\; \boxed{\textit{Beneficio} = \$\ 4150}$

13) ***i)*** Dar una ecuación implícita de cada una de las rectas en el plano que verifica las siguientes condiciones. En los casos en que sea posible, deducir la ecuación segmentaria.

a) Tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y ordenada al origen -2.

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow -\frac{1}{2}x + y + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x - 2y - 4 = 0} \text{ ecuación implícita} \Rightarrow x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -2 \\ y = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1} \text{ Ecuación segmentaria}$$

Expresada en forma vectorial: pendiente $\frac{1}{2}$ entonces el vector director es $(2;1)$ y la ordenada es -2 entonces la recta corta al eje y en -2, se escribe como vector $(0;-2)$ luego $\boxed{(x;y) = (0;-2) + \lambda(0;-2)}$

b) Pasa por los puntos $P = (1;-1)$ y $Q = (3;2)$.

$$y - y_Q = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}(x - x_Q) \quad \text{ecuación de la recta que pasa por dos puntos } P \text{ y } Q$$

$$y - 2 = \frac{2-(-1)}{3-1}(x-3) \Rightarrow y - 2 = \frac{3}{2}(x-3) \Rightarrow 2y - 4 = 3x - 9 \Rightarrow \boxed{-3x + 2y + 5 = 0} \vee \boxed{3x - 2y - 5 = 0} \text{ ecuación implícita}$$

$$3x - 2y - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -5/2 \\ y = 0 \Rightarrow x = 5/3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{5/3} + \frac{y}{-5/2} = 1} \text{ ecuación segmentaria}$$

Expresada en forma vectorial: $\boxed{(x;y) = P + \lambda(Q-P) = (1;-1) + \lambda(2;3)}$

c) Tiene pendiente -2 y pasa por el punto $A=(1;-2)$.

$$y-y_A=m(x-x_A)$$

$y-(-2)=-2(x-1)\Rightarrow y+2=-2x+2\Rightarrow y=-2x\Rightarrow \boxed{2x+y=0}$ ecuación implícita. No es posible deducir la ecuación segmentaria

Expresada en forma vectorial: $\boxed{(x;y)=(1;-2)+\lambda(1;-2)}$

d) Pasa por los puntos $P=(2;-3)$ y $Q=(3;-3)$.

$y-y_Q=\dfrac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}(x-x_Q)$ ecuación de la recta que pasa por dos puntos P y Q

$y-(-3)=\dfrac{-3-(-3)}{3-2}(x-3)\Rightarrow y+3=\dfrac{0}{1}(x-3)\Rightarrow \boxed{y+3=0}$ ecuación implícita

No es posible deducir la ecuación segmentaria

Expresada en forma vectorial: $\boxed{(x;y)=P+\lambda(Q-P)=(2;-3)+\lambda(1;0)}$

e) Contiene a todos los puntos de abscisa 5.

Cualquiera sea la ordenada y, $x=5\ \Rightarrow \boxed{x-5=0}$ ecuación implícita

No es posible deducir la ecuación segmentaria

f) Es paralela a la recta de ecuación $y=3$ y pasa por $P=(2;-1)$

Si es paralela a $y=3$, la recta tiene pendiente cero entonces reemplazando en $y-y_P=m(x-x_P)$ se obtiene

$y+1=0.(x-2)\ \Rightarrow \boxed{y+1=0}$ ecuación implícita

No es posible deducir la ecuación segmentaria

Expresada en forma vectorial: $\boxed{(x;y)=(2;-1)+\lambda(1;0)}$

ii. Dar una ecuación vectorial de cada una de las rectas en el plano que verifica las siguientes condiciones. En los casos en que sea posible, deducir la ecuación segmentaria.

a) Tiene la dirección del vector $\vec{v}=\left(2;-1\right)$ y pasa por el origen de coordenadas.

$L: X=(x;y)=\lambda(2;-1)+(0;0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{X=\lambda(2;-1)}$

No se puede deducir la ecuación segmentaria ya que pasa por el origen

b) Tiene la dirección del vector de origen $A=\left(1;-2\right)$ y extremo $B=\left(1;-1\right)$ y pasa por el punto $Q=\left(3;1\right)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(1;-1)-(1;-2)=(0;1)$

$L: X=(x;y)=\lambda(0;1)+(3;1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{X=\lambda(0;1)+(3;1)}$

No se puede deducir la ecuación segmentaria ya que es una recta paralela al eje y, $x=3$

c) Pasa por los puntos $A=\left(2;-3\right)$ y $B=\left(0;1\right)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(0;1)-(2;-3)=(-2;4)$ y elegimos $B=(0;1)$, punto por donde pasa la recta

$L: X=(x;y)=\lambda(-2;4)+(0;1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{X=\lambda(-2;4)+(0;1)}$

$$X=(x;y)=\lambda(-2;4)+(0;1)\Rightarrow\begin{cases} x=-2\lambda \quad \Rightarrow \lambda=\dfrac{x}{-2} \\ y=\ 4\lambda+1\Rightarrow\lambda=\dfrac{y-1}{4}\end{cases}\Rightarrow \boxed{\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{4}} \text{ Expresión simétrica}$$

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{4}\Rightarrow\boxed{y=-2x+1}\text{ Expresión explícita}\Rightarrow 2x+y+1=0 \text{ Expresión implícita}\Rightarrow\boxed{\frac{x}{1/2}+\frac{y}{1}=1}\text{ Expresión segmentaria}$$

14) En cada caso, indicar si el punto P pertenece a la recta L

a) $L:\ X=\lambda(1;-2)+(3;5) \qquad P=(1;1)$

$X=(x;y)=\lambda(1;-2)+(3;5)$ si existe λ entonces $P\in L$

$(1;1)=\lambda(1;-2)+(3;5)$

$$(1;1)=(\lambda+3;-2\lambda+5)\Rightarrow\begin{cases}1=\lambda+3\Rightarrow\lambda=-2\\1=-2\lambda+5\Rightarrow\lambda=2\end{cases}\Rightarrow -2\neq 2\therefore \boxed{P\notin L}$$

b) $L:\ X=\alpha(1;1)+(3;-2) \qquad P=\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$

$X=(x;y)=\alpha(1;1)+(3;-2)$ si existe α entonces $P\in L$

$\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)=\alpha(1;1)+(3;-2)$

$$\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)=(\alpha+3;\alpha-2)\Rightarrow\begin{cases}\frac{5}{2}=\alpha+3\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}=\alpha-2\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\therefore\boxed{P\in L}$$

c) $L:\ y=-2x+3 \qquad P=(0;3)$

Reemplazando $3\overset{?}{=}-2.0+3\Rightarrow 3=3\Rightarrow\boxed{P\in L}$

d) $L:\ 4x-3y=-2 \qquad P=(1;-2)$

Reemplazando $4.1-3.(-2)\overset{?}{=}-2\Rightarrow 10\neq-2\Rightarrow\boxed{P\notin L}$

15) ***i.*** En cada caso, hallar una ecuación vectorial de la recta que verifica las condiciones dadas:

a) Tiene dirección $(2;-1;3)$ y pasa por $A=(1;2;-1)$.

$$L: \boxed{X=\lambda(2;-1;3)+(1;2;-1)}$$

b) Es paralela a $L_1: X=\lambda(2;3;-4)+(1;5;7)$ y pasa por el origen de coordenadas.

Si L es paralela a L_1 entonces tienen el mismo vector dirección o sea $(2;3;-4)$

$$L: X=\lambda(2;3;-4)+(0;0;0) \qquad L: \boxed{X=\lambda(2;3;-4)}$$

c) Pasa por los puntos $A=(1;5;1)$ y $B=(-4;2;3)$.

Calculamos la dirección de la recta que decidimos pase por el punto A

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(-4;2;3)-(1;5;1)=(-5;-3;2)$$

$$L: \boxed{X=\lambda(-5;-3;2)+(1;5;1)}$$

ii. Indicar si los puntos $P=(1;1;1)$ y $Q=(5;0;5)$ pertenecen a la recta hallada en ***a)***.

Reemplazamos P en la ecuación de la recta L

$$X=(x;y;z)=\lambda(2;-1;3)+(1;2;-1) \Rightarrow (1;1;1)=\lambda(2;-1;3)+(1;2;-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1=2\lambda+1 \Rightarrow \lambda=0 \\ 1=-\lambda+2 \Rightarrow \lambda=1 \\ 1=3\lambda-1 \Rightarrow \lambda=2/3 \end{cases} \quad \text{entonces } \boxed{P \notin L}$$

Reemplazamos Q en la ecuación de la recta L

$$X=(x;y;z)=\lambda(2;-1;3)+(1;2;-1) \Rightarrow (5;0;5)=\lambda(2;-1;3)+(1;2;-1) \Rightarrow \begin{cases} 5=2\lambda+1 \Rightarrow \lambda=2 \\ 0=-\lambda+2 \Rightarrow \lambda=2 \\ 5=3\lambda-1 \Rightarrow \lambda=2 \end{cases} \quad \text{entonces } \boxed{Q \in L}$$

iii. Mostrar dos puntos pertenecientes a la recta hallada en ***b)***

$L:\boxed{X=\lambda(2;3;-4)}$

Damos distintos valores al parámetro λ

Si $\lambda=0\Rightarrow\boxed{X=(0;0;0)}$

Si $\lambda=-1\Rightarrow\boxed{X=(-2;-3;4)}$

16) ***i.*** En cada caso, hallar una ecuación del plano que verifica las condiciones dadas.

a) Pasa por el punto $P_0=(1;2;-1)$ y es perpendicular al vector $\vec{n}=(-1;2;3)$.

$\overrightarrow{P_0P}\bullet\vec{n}=0$ Sustituyendo $\overrightarrow{P_0P}$ por $(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ y $\vec{n}$ por $(n_x;n_y;n_z)$ obtenemos: $(x-x_0;y-y_0;z-z_0)\bullet(n_x;n_y;n_z)=0$ efectuamos el producto cartesiano:

$(x-x_0).n_x+(y-y_0).n_y+(z-z_0).n_z=0$

$\pi:(x-1;y-2;z+1).(-1;2;3)=0\Rightarrow(x-1).(-1)+(y-2).2+(z+1).3=0\Rightarrow -x+1+2y-4+3z+3=0\therefore\boxed{\pi:-x+2y+3z=0}$

b) Es paralelo al plano $\pi_1:x+y+1=0$ y pasa por $P_1=(1;1;-1)$

$(x-x_0;y-y_0;z-z_0)\bullet(n_x;n_y;n_z)=0$ y $\vec{n}=(n_x;n_y;n_z)=(1;1;0)$

$\pi:(x-1;y-1;z+1).(1;1;0)=0\Rightarrow(x-1).1+(y-1).1+(z+1).0=0\Rightarrow x-1+y-1+0=0\therefore\boxed{\pi:x+y-2=0}$

c) Pasa por el punto $P_0=(2;-1;0)$ y es perpendicular a la recta $L:X=\alpha(1;0;-1)$

$(x-x_0;y-y_0;z-z_0)\bullet(n_x;n_y;n_z)=0$ y $\vec{n}=(n_x;n_y;n_z)=(1;0;-1)$

$\pi:(x-2;y+1;z-0).(1;0;-1)=0\Rightarrow(x-2).1+(y+1).0+z.(-1)=0\Rightarrow x-2-z=0\therefore\boxed{\pi:x-z-2=0}$

ii. Hallar una ecuación vectorial de los planos obtenidos en ***i.***

a) $\pi: -x+2y+3z=0 \Rightarrow x=2y+3z \Rightarrow (x;y;z)=(2y+3z;y;z)=(2y;y;0)+(3z;0;z)=y(2;1;0)+z(3;0;1) \Rightarrow \boxed{X=\alpha(2;1;0)+\beta(3;0;1)}$

b) $\pi: x+y-2=0 \Rightarrow y=-x+2 \Rightarrow (x;y;z)=(x;-x+2;z)=(x;-x+2;0)+(0;0;z)=$

$=x(1;-1;0)+(0;2;0)+z(0;0;1) \Rightarrow \boxed{X=\alpha(1;-1;0)+\beta(0;0;1)+(0;2;0)}$

c) $\pi: x-z-2=0 \Rightarrow z=x-2 \Rightarrow (x;y;z)=(x;y;x-2)=(x;0;x-2)+(0;y;0)=$

$=x(1;0;1)+(0;0;-2)+y(0;1;0) \Rightarrow \boxed{X=\alpha(1;0;1)+\beta(0;1;0)+(0;0;-2)}$

iii. Mostrar dos puntos pertenecientes al plano hallado en ***a)***.

$\pi: -x+2y+3z=0$ Escribimos $x=2y+3z$, le damos valores arbitrarios a la "y" y a la "z"

$P=(5;1;1)$, $Q=(4;2;0)$

iv. Indicar si el origen de coordenadas y el punto $P=(1;1;1)$ pertenecen al plano hallado en ***a)***

Reemplazamos el origen en $\pi: -x+2y+3z=0 \therefore -0+2.0+3.0\overset{?}{=}0$

Se verifica $0=0 \Rightarrow \boxed{(0;0;0)\in\pi}$

Reemplazamos el punto $P=(1;1;1)$ en $\pi: -x+2y+3z=0 \therefore -1+2.1+3.1\overset{?}{=}0$

Resulta $4\neq 0 \Rightarrow \boxed{P=(1;1;1)\notin\pi}$