UNIDAD TEMÁTICA 1

VECTORES, RECTA Y PLANO

1) ***a)*** Representar en el plano los puntos: $A=(2;0)$, $B=(-1;0)$, $C=(2;-3)$, $D=(0;-2)$, $E=(-5;-1)$

b) Considerando los puntos anteriores, calcular las coordenadas de:

i. $-2B$ ***ii.*** $C+D$ ***iii.*** $\frac{1}{2}E-A$ ***iv.*** $2A-D+3C$

c) Representar en el plano los puntos hallados en ***b)***

2) Representar los siguientes conjuntos en el plano e indicar si los puntos dados pertenecen a ellos:

a) $A=\left\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, y=-3\right\}$ $P=(-3;0)$ $Q=(7;-3)$

b) $B=\left\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, x=5\right\}$ $P=(5;5)$ $Q=(5;3)$

c) $C=\left\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, x+2y=-1\right\}$ $P=(1;-1)$ $Q=(1;2)$

d) $D=\left\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, y=\frac{1}{3}x\right\}$ $P=(1;3)$ $Q=(3;1)$

3) Dados $A=(1;0;-2)$ $B=(2;1;3)$ $C=(-1;2;-3)$, calcular:

a) $A-2B$ ***b)*** $B-2(A+C)$ ***c)*** $\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}B-\frac{1}{8}C$ ***d)*** $2A-B+C$

4) Dados los vectores de $\Re^2$: $\vec{u} = (3;2)$ y $\vec{v} = (1;2)$

a) Representarlos gráficamente

b) Hallar $\vec{u} + \vec{v}$, siendo **"+"** la suma usual, tal que $(a;b) + (c;d) = (a+c;b+d)$

c) Hallar $3\vec{u} + 2\vec{v}$ siendo "**.**" a multiplicación por un escalar usual, tal que $\alpha.(a;b) = (\alpha a;\alpha b)$

d) Representar gráficamente los vectores obtenidos en ***b)*** y ***c)***

5) Escribir en forma explícita:

a) El neutro para la suma en $\Re^3$:

b) El inverso aditivo de $(1;2;-3;5) \in \Re^4$:

c) El inverso aditivo del inverso aditivo de un vector $\vec{v} \in \Re^n$:

d) El inverso aditivo del neutro para la suma en $\Re^n$:

e) El vector $(1;1;1) + (3;2;2)$ en $\Re^3$:

f) La propiedad conmutativa para la suma de vectores en $\Re^3$:

g) La suma del inverso aditivo de $(1;1)$ con **5** veces el vector $(4;5)$ en $\Re^2$:

h) El vector $3.(1;1;8) + 4.\left[(-2;3;0) + 5.(1;0;1)\right]$ en $\Re^3$:

i) El vector de $\Re^3$ que sumado al inverso aditivo del vector $(1;-4;6)$ da por resultado el vector $3.(3;4;2)$:

6) En cada caso representar geométricamente el vector $\overrightarrow{PQ}$, hallar sus componentes y calcular su módulo o norma.

a) $P = (1;2)$ $Q = (5;5)$

b) $P = (10;2)$ $Q = (-6;-1)$

c) $P = (3;-5)$ $Q = (4;7)$

7) Calcular el producto escalar indicado y representar los vectores cuando se indique:

a) $(2;3).(1;2)$ en $\Re^2$, represente gráficamente los vectores.

b) $(-2;3).(3;2)$ en $\Re^2$, represente gráficamente los vectores.

c) $(1;2;5).(-1;3;0)$ en $\Re^3$.

d) $(1;0;4;5).(0;2;0;0)$ en $\Re^4$.

e) $(19;32;7).(0;0;0)$ en $\Re^3$.

8) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\Re^n$. Indicar verdadero o falso, justificando:

a) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

b) $\vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

c) $\vec{u}.\vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0}$

9) Dados los vectores $(1;3)$ y $(-3;1)$ de $\Re^2$

a) Representarlos gráficamente. ¿Qué ángulo forman entre ellos?

b) Verificar que su producto escalar es igual a **0**. ¿Cómo se llaman estos vectores?

c) Hallar un vector $(x;y) \in \Re^2$ tal que $(x;y).(1;2) = 0$ y represéntelo gráficamente. ¿Es única la solución?

10) El valor de x, para que el vector opuesto al vector $\vec{v} = (4;-1;5)$ sea ortogonal al vector $\vec{u} = (x;-2;2)$ es:

a) $x = 4$ *b)* $x = 0$ *c)* $x = -3$ *d)* Ninguna de las anteriores

11) Determinar si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos cosas:

a) $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j}$ $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$ *b)* $\vec{u} = (6;-4)$ $\vec{v} = (-3;2)$ *c)* $\vec{u} = (1;2;-3)$ $\vec{v} = (3;0;1)$ *d)* $\vec{u} = (-1;1;3)$ $\vec{v} = (2;-2;4)$

12) Una empresa fábrica tres productos P_1, P_2 y P_3 cuyos costos de producción son **\$30**, **\$40** y **\$50** respectivamente, el número de unidades producidas para cada producto es **120**, **140**, **95**. Si se sabe que el vector de precios es $\vec{v}_p = (45;50;60)$.

Hallar el beneficio que puede obtener la empresa.

13) ***i)*** Dar una ecuación implícita de cada una de las rectas en el plano que verifica las siguientes condiciones. En los casos en que sea posible, deducir la ecuación segmentaria.

a) Tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y ordenada al origen -2.

b) Pasa por los puntos $P = (1;-1)$ y $Q = (3;2)$.

c) Tiene pendiente -2 y pasa por el punto $A = (1;-2)$.

d) Pasa por los puntos $P = (2;-3)$ y $Q = (3;-3)$.

e) Contiene a todos los puntos de abscisa 5.

f) Es paralela a la recta de ecuación $y = 3$ y pasa por $P = (2;-1)$

ii. Dar una ecuación vectorial de cada una de las rectas en el plano que verifica las siguientes condiciones. En los casos en que sea posible, deducir la ecuación segmentaria.

a) Tiene la dirección del vector $\vec{v} = (2;-1)$ y pasa por el origen de coordenadas.

b) Tiene la dirección del vector, de origen $A = (1;-2)$ y extremo $B = (1;-1)$ y pasa por el punto $Q = (3;1)$

c) Pasa por los puntos $A = (2;-3)$ y $B = (0;1)$

14) En cada caso, indicar si el punto P pertenece a la recta L

a) $L: X=\lambda(1;-2)+(3;5)$ $\quad P=(1;1)$

b) $L: X=\alpha(1;1)+(3;-2)$ $\quad P=\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$

c) $L: y=-2x+3$ $\quad P=(0;3)$

d) $L: 4x-3y=-2$ $\quad P=(1;-2)$

15) ***i.*** En cada caso, hallar una ecuación vectorial de la recta que verifica las condiciones dadas:

a) Tiene dirección $(2;-1;3)$ y pasa por $A=(1;2;-1)$.

b) Es paralela a $L_1: X=\lambda(2;3;-4)+(1;5;7)$ y pasa por el origen de coordenadas.

c) Pasa por los puntos $A=(1;5;1)$ y $B=(-4;2;3)$.

ii. Indicar si los puntos $P=(1;1;1)$ y $Q=(5;0;5)$ pertenecen a la recta hallada en ***a)***.

iii. Mostrar dos puntos pertenecientes a la recta hallada en ***b)***

16) ***i.*** En cada caso, hallar una ecuación del plano que verifica las condiciones dadas:

a) Pasa por el punto $P_0=(1;2;-1)$ y es perpendicular al vector $\vec{n}=(-1;2;3)$.

b) Es paralelo al plano $\pi_1: x+y+1=0$ y pasa por $P_1=(1;1;-1)$

c) Pasa por el punto $P_0=(2;-1;0)$ y es perpendicular a la recta $L: X=\alpha(1;0;-1)$

ii. Hallar una ecuación vectorial de los planos obtenidos en ***i.***

iii. Mostrar dos puntos pertenecientes al plano hallado en ***a)***.

iv. Indicar si el origen de coordenadas y el punto $P=(1;1;1)$ pertenecen al plano hallado en ***a)***

RESPUESTAS

1) *a)* a cargo del alumno

b) i. $-2B=(2;0)$ *ii.* $C+D=(2;-5)$ *iii.* $\frac{1}{2}E-A=\left(-\frac{9}{2};-\frac{1}{2}\right)$ *iv.* $2A-D+3C=(10;-7)$

c) a cargo del alumno

2) *a)* $P\notin A \quad Q\in A$ *b)* $P\in B \quad Q\in B$ *c)* $P\in C \quad Q\notin C$ *d)* $P\notin D \quad Q\in D$

3) *a)* $A-2B=(-3;-2;-8)$ *b)* $B-2(A+C)=(2;-3;13)$ *c)* $\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}B-\frac{1}{8}C=\left(\frac{9}{8};0;\frac{1}{8}\right)$ *d)* $2A-B+C=(-1;1;-10)$

4) *a) a cargo del alumno* *b)* (4; 4) *c)* (11; 10) *d) a cargo del alumno*

5)

a) $(0;0;0)$ *b)* $(-1;-2;3;-5)$ *c)* $\vec{v}=(v_1\ ;\ v_2\ ;\ldots\ ;\ v_n)$

d) vector nulo *e)* $(4;3;3)$ *f)* $(x_1;x_2;x_3)+(y_1;y_2;y_3)=(y_1;y_2;y_3)+(x_1;x_2;x_3)$

g) $(19;24)$ *h)* $(15;15;44)$ *i)* $(10;8;12)$

6) *a)* $\overrightarrow{PQ}=(4;3) \quad \left|\overrightarrow{PQ}\right|=5$ *b)* $\overrightarrow{PQ}=(-16;-3) \quad \left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{265}$ *c)* $\overrightarrow{PQ}=(1;12) \quad \left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{145}$

7) a) 8 *b)* 0 *c)* 5 *d)* 0 *e)* 0

8) a) V *b) V* *c) F*

9) *a)* recto *b)* vectores ortogonales *c)* (–2; 1), no es única.

10) $x = -3$

11) *a)* **ninguna** *b)* **paralelos** *c)* **ortogonales** *d)* **ninguna**

12) **B = $ 4150**

13

i. *a)* $x-2y-4=0$ *b)* $3x-2y-5=0$ *c)* $2x+y=0$ *d)* $y+3=0$ *e)* $x-5=0$ *f)* $y+1=0$

ii. *a)* $L: X=\lambda(2;-1)$ *b)* $L: X=\lambda(0;1)+(3;1)$ *c)* $L: X=\lambda(-2;4)+(0;1)$

14) *a)* **no pertenece** *b)* **pertenece** *c)* **pertenece** *d)* **no pertenece**

15) *i.* *a)* $L: X=\lambda(2;-1;3)+(1;2;-1)$ *b)* $L: X=\lambda(2;3;-4)$ *c)* $L: X=\lambda(-5;-3;2)+(1;5;1)$

ii. $P \notin L$, $Q \in L$

iii. **Dar distintos valores al parámetro.**

16) *i.*

a) $\pi: -x+2y+3z=0$

b) $\pi: x+y-2=0$

c) $\pi: x-z-2=0$

ii.

a) $\pi: X=\alpha(2;1;0)+\beta(3;0;1)$

b) $\pi: X=\alpha(1;-1;0)+\beta(0;0;1)+(0;2;0)$

c) $\pi: X=\alpha(1;0;1)+\beta(0;1;0)+(0;0;-2)$

iii) **A cargo del alumno**

iv) $(0;0;0)\in\pi$, $P\notin\pi$