UNIDAD TEMÁTICA 3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1) Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

a) Escribir la matriz de los coeficientes de cada uno de los sistemas.
b) Determinar la matriz ampliada de cada uno de ellos.
c) Escribir cada uno de los sistemas en forma matricial.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \quad A.X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \end{array}\right) \quad A.X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \quad A.X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2) Resolver por el método matricial (si es posible)

a) $\begin{cases} 2x - \ \ y = 3 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases}$ $\quad AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

La matriz de los coef. es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 14 \neq 0, \ \exists A^{-1}$ Se puede resolver por el método matricial

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\ A \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}}$$

$$b)\begin{cases} -x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = -5 \end{cases} \qquad AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0, \exists A^{-1}$

Se puede resolver por el método matricial

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ -\frac{32}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ -\frac{32}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

$$c)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -5x_1 + 13x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases} \qquad AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

La matriz de los coeficientes es : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -5 & 13 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -5 & 13 & -10 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \nexists\ A^{-1}$ $\boxed{\text{No se puede resolver por método matricial}}$

3) Hallar todos los valores de $k \in \Re$ para que las ecuaciones dadas no formen un sistema de Cramer: $\begin{cases} 4x - 2y - 8z = -2 \\ -2x + 3y + 5z = 2 \\ 2x - y + kz = -1 \end{cases}$

Para que no forme un sistema de Cramer, si el sistema es cuadrado, el determinante debe ser cero:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -8 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & k \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -8 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \text{no es un sistema de Cramer}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -8 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & k \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & k \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4(3k+5) + 2(-2k-10) - 8(-4) = 12k + 20 - 4k - 20 + 32 = 8k + 32$$

$$\Rightarrow |A| = 8k + 32 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{k = -4} \qquad \boxed{\text{No es un sistema de Cramer si } k = -4}$$

4) Resolver aplicando Cramer (si es posible)

$$a)\ \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases} \qquad \Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - (-2).\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.(-22) - (-2).(4) + 1.(-6) = -42 \neq 0$$

Como $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta(A)}$ $\quad x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta(A)}$ $\quad x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta(A)}$ entonces

$$x_1 = -\frac{1}{42}.\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{42}.\left[0.\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - (-2).\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}\right] = -\frac{1}{42}.\left[0.(-22) - (-2).(-58) + 1.32\right] = -\frac{1}{42}.(-84) = \boxed{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{42}.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{42}.\left[2.\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}\right] = -\frac{1}{42}.\left[2.(-58) - 0.4 + 1.(-10)\right] = -\frac{1}{42}.(-126) = \boxed{3}$$

$$x_3 = -\frac{1}{42}.\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -\frac{1}{42}.\left[2.\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} - (-2).\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right] = -\frac{1}{42}.\left[2.(-32) - (-2).(-10) + 0.(-6)\right] = -\frac{1}{42}.(-84) = \boxed{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \{(2;3;2)\}}$$

$$b)\begin{cases}4x-3z=6\\3y+4z=5\\-2x+5z=4\end{cases}\qquad \Delta(A)=\begin{vmatrix}4&0&-3\\0&3&4\\-2&0&5\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}3&4\\0&5\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}0&4\\-2&5\end{vmatrix}+(-3)\cdot\begin{vmatrix}0&3\\-2&0\end{vmatrix}=4\cdot 15-0\cdot(8)+(-3)\cdot 6=42\neq 0$$

$$x_1=\frac{1}{42}\cdot\begin{vmatrix}6&0&-3\\5&3&4\\4&0&5\end{vmatrix}=\frac{1}{42}\cdot\left[6\cdot\begin{vmatrix}3&4\\0&5\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}5&4\\4&5\end{vmatrix}+(-3)\cdot\begin{vmatrix}5&3\\4&0\end{vmatrix}\right]=\frac{1}{42}\cdot[6\cdot 15-0\cdot 9+(-3)\cdot(-12)]=\frac{1}{42}\cdot(126)=\boxed{3}$$

$$x_2=\frac{1}{42}\cdot\begin{vmatrix}4&6&-3\\0&5&4\\-2&4&5\end{vmatrix}=\frac{1}{42}\cdot\left[4\cdot\begin{vmatrix}5&4\\4&5\end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix}0&4\\-2&5\end{vmatrix}+(-3)\cdot\begin{vmatrix}0&5\\-2&4\end{vmatrix}\right]=\frac{1}{42}\cdot[4\cdot 9-6\cdot 8+(-3)\cdot 10]=\frac{1}{42}\cdot(-42)=\boxed{-1}$$

$$x_3=\frac{1}{42}\cdot\begin{vmatrix}4&0&6\\0&3&5\\-2&0&4\end{vmatrix}=\frac{1}{42}\cdot\left[4\cdot\begin{vmatrix}3&5\\0&4\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}0&5\\-2&4\end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix}0&3\\-2&0\end{vmatrix}\right]=\frac{1}{42}\cdot[4\cdot(12)-0\cdot 10+6\cdot 6]=\frac{1}{42}\cdot 84=\boxed{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{S=\{(3;-1;2)\}}$$

$$c)\begin{cases}x-\ y-\ z=0\\8x-2y+\ z=0\\x+3y+5z=0\end{cases}\Rightarrow\Delta(A)=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\8&-2&1\\1&3&5\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-2&1\\3&5\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}8&1\\1&5\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}8&-2\\1&3\end{vmatrix}=1\cdot(-13)-(-1)\cdot 39-1\cdot 26=0$$ $\boxed{\text{No se puede aplicar Cramer}}$

5) ***i)*** Discutir la compatibilidad y determinar el conjunto solución de los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss-Jordan y el método de eliminación de Gauss.

ii) Cuando sea posible, escribir la solución general del sistema dado como suma de solución del sistema homogéneo asociado y una de sus soluciones particulares.

$$a)\begin{cases} x+\ y+2z=\ 1\\ x+2y-\ z=-2\\ x+3y+\ z=\ 5\end{cases}$$

⇨ **Si se resuelve por el método de Gauss-Jordan**

Se calculan los rangos de ***A*** y ***A'*** y luego se aplica el Teorema de Rouche – Frobenius

$$\left(\begin{array}{ccc|c}(1)&1&2&1\\1&2&-1&-2\\1&3&1&5\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&(1)&-3&-3\\0&2&-1&4\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&5&4\\0&1&-3&-3\\0&0&5&10\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ 1/5\cdot F_3\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&5&4\\0&1&-3&-3\\0&0&(1)&2\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-6\\0&1&0&3\\0&0&1&2\end{array}\right)$$

$$r(A)=3\quad\wedge\quad r(A')=3\Rightarrow r(A)=r(A')=3=\text{n° de incógnitas}\qquad \boxed{S=\{(-6;3;2)\}}$$

⇨ **Si se resuelve por el método de eliminación gaussiana**

Consiste en reducir la matriz ampliada mediante operaciones elementales de filas a una matriz escalonada por filas donde **i > j:** $a_{ij}=0$
Si el sistema de ecuaciones lineales es cuadrado se transforma en una matriz triangular
Una vez reducida la matriz ampliada a la forma escalonada por filas se utiliza el método de sustitución por retroceso

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\1&2&-1&-2\\1&3&1&5\end{array}\right)\begin{array}{l}F_1\\F_2\\F_3\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&1&-3&-3\\0&2&-1&4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\F_2-F_1\\F_3-F_1\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&1&-3&-3\\0&0&5&10\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\F_3-2F_2\end{array}\qquad \begin{cases}x+y+2z=\ 1\\ \quad y-3z=-3\\ \qquad 5z=10\quad\Rightarrow\ \boxed{z=2}\end{cases}$$

Se sustituye en $y-3z=-3$ y se obtiene $\boxed{y=3}$

Se sustituye en $x+y+2z=\ 1$ y se obtiene $\boxed{x=-6}$ $\qquad\boxed{S=\{(-6;3;2)\}\quad SCD}$

$$b)\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x-y+7z=3 \\ -3x-4y-5z=-5 \end{cases}$$

⇨ **Si se resuelve por el método de Gauss-Jordan**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ -3 & -4 & -5 & -5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) -1/5\cdot F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & (1) & -1 & 1/5 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 8/5 \\ 0 & 1 & -1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 3/5 \end{array}\right) 5/3\cdot F_3 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 8/5 \\ 0 & 1 & -1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & (1) \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$r(A)=2 \quad \wedge \quad \mathrm{r}(A')=3 \quad \Rightarrow \quad r(A)\neq \mathrm{r}(A') \quad \Rightarrow \quad S.I \quad \Rightarrow \quad \boxed{S=\varnothing}$$

⇨ **Si se resuelve por el método de eliminación gaussiana**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ -3 & -4 & -5 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2-2F_1 \\ F_3+3F_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 5F_3+2F_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$S.I$ ya que $0.x+0.y+0.z=3 \Rightarrow 0=3$ absurdo $\Rightarrow \boxed{S=\varnothing}$

$$c)\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

➯ **Si se resuelve por el método de Gauss-Jordan**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} (1) & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & (1) & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) -1/5 \cdot F_3 \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1) \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$r(A) = 2 \quad \wedge \quad \mathrm{r(A')} = 3 \quad \Rightarrow \quad r(A) \neq \mathrm{r(A')} \quad SI \Rightarrow \boxed{S = \varnothing}$$

➯ **Si se resuelve por el método de eliminación gaussiana**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

$$S.I \quad \text{ya que} \quad 0 \cdot \mathrm{x}_1 + 0 \cdot \mathrm{x}_2 + 0 \cdot \mathrm{x}_3 + 0 \cdot \mathrm{x}_4 = -5 \quad \Rightarrow \quad 0 = -5 \ \text{absurdo} \Rightarrow \boxed{S = \varnothing}$$

$$d)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3=0 \end{cases}$$

➩ **Si se resuelve por el método de Gauss-Jordan**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right) -1/3\cdot F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & (1) & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) -1/4\cdot F_3 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$r(A)=3 \;\wedge\; r(A')=3 \quad \Rightarrow \quad 3=3=\text{nro. de incógnitas} \;\Rightarrow\; SCD \;\therefore\; \boxed{S=\{(0;0;0)\}}$$

➩ **Si se resuelve por el método de eliminación gaussiana**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 3F_3-4F_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ \quad -3x_2+3x_3=0 \\ \qquad -12x_3=0 \end{cases}$$

$$SCD \;\therefore\; \boxed{S=\{(0;0;0)\}}$$

$$e)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4= & 0\\ x_1+x_2+x_3-x_4= & 4\\ x_1+x_2-x_3+x_4= & -4\\ x_1-x_2+x_3+x_4= & 2\end{cases}$$

⇨ **Si se resuelve por el método de Gauss-Jordan**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} (1) & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2\end{array}\right) -1/2\cdot F_2 \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (1) & -2\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2\end{array}\right) -1/2\cdot F_3 \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & (1) & 0 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2\end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2\end{array}\right) -1/2\cdot F_4 \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & (1) & 0 & 0 & -1\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right) \quad S=\{(1;-1;2:-2)\}$$

$S\ C\ D$

⇨ **Si se resuelve por el método de eliminación gaussiana**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right) \approx \begin{array}{c} \\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\\ F_4-F_1\end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2\end{array}\right) \underset{\substack{\text{permutamos}\\ F_2 \text{ con } F_4}}{\overset{\approx}{\downarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4\end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = & 0\\ -2x_2 = & 2\\ -2x_3 = & -4\\ 2x_4 = & 4\end{cases}$$

$\boxed{S=\{(1,-1,2,-2)\}}$ $S\ C\ D$

$$f)\begin{cases}4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0\\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0\\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0\end{cases}$$

⇨ **Si se resuelve por el método de Gauss-Jordan**

$$\left(\begin{array}{cccc|c}4 & -1 & 2 & (1) & 0\\ 2 & 3 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 7 & -4 & -5 & 0\\ 2 & -11 & 7 & 8 & 0\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c}4 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 10 & (1) & 3 & 0 & 0\\ 20 & 2 & 6 & 0 & 0\\ -30 & -3 & -9 & 0 & 0\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c}14 & 0 & 5 & 1 & 0\\ 10 & 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} r(A)=2 \quad \wedge \quad r(A')=2 \\ r(A)= r(A')=2 \quad \wedge \quad 2<4 \quad \therefore \quad SCI\end{array}$$

$n-h=4-2=2$ (grado de libertad)

$$\begin{cases}14x_1 + 5x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = -14x_1 - 5x_3\\ 10x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -10x_1 - 3x_3\end{cases}$$

$$\boxed{S=\left\{\left(x_1;x_2;x_3;x_4\right)\in\Re^4 \ / \ x_2=-10x_1-3x_3 \wedge x_4=-14x_1-5x_3\right\}=\left\{\left(x_1;-10x_1-3x_3;x_3;-14x_1-5x_3\right)\wedge x_1\in\Re \wedge x_3\in\Re\right\}}$$

⇨ **Si se resuelve por el método de eliminación gaussiana**

$$\left(\begin{array}{cccc|c}4 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 7 & -4 & -5 & 0\\ 2 & -11 & 7 & 8 & 0\end{array}\right) \begin{array}{c}\\ 2F_2-F_1\\ \\ 2F_4-F_1\end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c}4 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 7 & -4 & -5 & 0\\ 0 & 7 & -4 & -5 & 0\\ 0 & -21 & 12 & 15 & 0\end{array}\right) \begin{array}{c}\\ \\ F_3-F_2\\ F_4+3F_2\end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c}4 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 7 & -4 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

nro. de incógnitas $-$ nro. de ecuaciones $=$ grado de libertad

$\Rightarrow 4-2=2$

$$\begin{cases}4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = \dfrac{4x_3+5x_4}{7} \quad \therefore \quad x_2 = \dfrac{4}{7}x_3 + \dfrac{5}{7}x_4\end{cases}$$

luego si se sustituye en la primera ecuación queda $x_1 = -\dfrac{5}{14}x_3 - \dfrac{1}{14}x_4$

$$\boxed{S=\left\{\left(x_1;x_2;x_3;x_4\right)\in\Re^4 \ / \ x_1=-\frac{5}{14}x_3-\frac{1}{14}x_4 \quad \wedge \quad x_2=\frac{4}{7}x_3+\frac{5}{7}x_4\right\} \ SCI}$$

$$g)\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4+3x_5=1\\ 2x_1-x_2+2x_3+2x_4+6x_5=2\\ 3x_1+2x_2-4x_3-3x_4-9x_5=3\end{cases}$$

⇨ **Si se resuelve por el método de Gauss-Jordan**

$$\left(\begin{array}{ccccc:c}(1)&1&-2&1&3&1\\2&-1&2&2&6&2\\3&2&-4&-3&-9&3\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccccc:c}1&1&-2&1&3&1\\0&-3&6&0&0&0\\0&-1&2&-6&-18&0\end{array}\right)-\frac{1}{3}.F_2\approx\left(\begin{array}{ccccc:c}1&1&-2&1&3&1\\0&(1)&-2&0&0&0\\0&-1&2&-6&-18&0\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&0&1&3&1\\0&1&-2&0&0&0\\0&0&0&-6&-18&0\end{array}\right)_{-\frac{1}{6}.F_3}\approx\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&0&1&3&1\\0&1&-2&0&0&0\\0&0&0&(1)&3&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccccc:c}1&0&0&0&0&1\\0&1&-2&0&0&0\\0&0&0&1&3&0\end{array}\right)$$

$r(A)=3 \quad \wedge \quad r(A')=3 \quad \Rightarrow \quad r(A)=r(A')=3 \quad \wedge \quad 3<5 \quad \therefore \quad SCI$

$n-h=5-3=2$ (grado de libertad)

$$\begin{cases} x_1=1\\ x_2-2x_3=0\Rightarrow x_2=2x_3\\ x_4+3x_5=0\Rightarrow x_4=-3x_5\end{cases}$$

$$\boxed{S=\left\{\left(x_1;x_2;x_3;x_4;x_5\right)\in\Re^5 \,/\, x_1=1\wedge x_2=2x_3\wedge x_4=-3x_5\right\}}$$

Otra forma de expresar la solución

$S=\left\{\left(1;2x_3\,;x_3\,;-3x_5\,;x_5\right)\right\}\Rightarrow S_H=\left(0;2x_3\,;x_3\,;-3x_5\,;x_5\right) \qquad S_{particular\ no\ homogéneo}=\left(1;0;0;0;0\right)$

$$\boxed{S_{general}=S_{particular}+S_H=\left(1;0;0;0;0\right)+\left(0;2x_3\,;x_3\,;-3x_5\,;x_5\right)}$$

Si se resuelve por el método de eliminación gaussiana

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 3F_3-F_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1/3F_2 \\ -1/6F_3 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$n-h=5-3=2$ (grado de libertad)

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4+3x_5=1 \\ x_2-2x_3=0 \quad \Rightarrow x_2=2x_3 \\ x_4+3x_5=0 \quad \Rightarrow x_4=-3x_5 \quad \text{Si se reemplaza en la 1ra ecuación} \Rightarrow x_1=1 \end{cases}$$

$$\boxed{S=\left\{\left(x_1;x_2;x_3;x_4;x_5\right)\in\Re^5 / x_1=1 \ \wedge \ x_2=2x_3 \ \wedge \ x_4=-3x_5\right\}} \quad \textit{SCI}$$

Otra forma de expresar la solución

$$S=\left\{\left(1;2x_3;x_3;-3x_5;x_5\right)\right\}\Rightarrow S_H=\left(0;2x_3;x_3;-3x_5;x_5\right) \qquad S_{particular\ no\ homogéneo}=\left(1;0;0;0;0\right)$$

$$\boxed{S_{general}=S_{particular}+S_H=\left(1;0;0;0;0\right)+\left(0;2x_3;x_3;-3x_5;x_5\right)}$$

6) Demostrar que los siguientes sistemas tienen solamente la solución trivial:

a) $\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 3x+7y+6z=0 \\ 2x+3y+7z=0 \end{cases}$ Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuadrado tiene solución únicas si y sólo si $|\mathbf{A}| \neq 0$ y ésta es la trivial.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 31 - 3\cdot 9 + 2\cdot(-5) = \underline{-6 \neq 0}$$ $\boxed{\text{La única solución es la trivial}}$

b) $\begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ 3x-4y+3z=0 \\ 4x-2y+3z=0 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-6) - 4\cdot(-3) + (-1)\cdot 10 = \underline{-10 \neq 0}$$ $\boxed{\text{La única solución es la trivial}}$

7) Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta:

a) Un sistema de ***m*** ecuaciones lineales con ***n*** incógnitas admite solución única sí y solo sí el rango de la matriz ampliada es ***n.*** **<u>Falso</u>**: Sólo si $r(A) = r(A') = n =$ ***número de incógnitas.***

b) Todos los sistemas homogéneos son compatibles determinados. **<u>Falso</u>**: puede ser ***SCD*** o ***SCI***

c) Todos los sistema de ***n*** ecuaciones con ***n*** incógnitas pueden resolverse mediante el método matricial. **<u>Falso</u>**: siempre y cuando el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

d) $\boxed{\textbf{Ninguna de las anteriores}}$

8) En los siguientes sistemas lineales determinar todos los valores de $k \in \Re$ para los cuales el sistema resultante tenga:

- Solución única
- ninguna solución
- infinitas soluciones

$$a)\begin{cases} x + ky + z = k \\ kx + y + z = 1 \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

Por determinantes y Gauss Jordan

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} - k\cdot\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(k-1) - k\cdot(k^2-1) + 1\cdot(k-1) = (k-1)(-k^2-k+2) =$$

$$= -(k-1)(k-1)(k+2) = -(k-1)^2(k+2) \quad \boxed{\Delta = -(k-1)^2(k+2)} \quad SCD \Leftrightarrow \Delta(A) \neq 0 \quad \therefore \quad \boxed{SCD \Leftrightarrow k \neq 1 \wedge k \neq -2}$$

Utilizando Gauss Jordan (o eliminación gaussiana) analizamos que sucede cuando los valores de k valen 1 o -2

$k = 1$

Reemplazamos en $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{array}\right)$ por $k = 1$ y se obtiene $\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow r(A) = r(A') = 1 < 3 \Rightarrow SCI$

$\therefore \quad \boxed{SCI \Leftrightarrow k = 1}$

$k=-2$

Reemplazamos en $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{array}\right)$ por $k=-2$ y se obtiene $\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) F_2.(-1/3) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & (1) & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \approx$

$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) F_3.(1/3) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (1) \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow r(A)=2 \wedge r(A')=3 \wedge 2 \neq 3 \quad \Rightarrow SI \quad \therefore \quad \boxed{SI \Leftrightarrow k=-2}$

$$b) \begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+(k^2-5)z=k \end{cases}$$

Por determinantes y Gauss Jordan:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k^2-5 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & k^2-5 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k^2-5 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\left[2\left(k^2-5\right)-1\right] - 1\cdot\left[1\left(k^2-5\right)-1\right] + (-1)\cdot(1-2) =$$

$$= 2k^2-11-k^2+6+1 = k^2-4 = (k+2)\ (k-2) \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\Delta(A)=(k+2)\ (k-2)}$$

$SCD \Leftrightarrow \Delta(A) \neq 0 \quad \therefore \quad \boxed{SCD \Leftrightarrow k \neq -2 \wedge k \neq 2}$

$k=-2$

Reemplazamos en $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & k^2-5 & k \end{array}\right)$ por $k=-2$ y se obtiene $\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$

Como en la última fila resulta $0.x+0.y+0.z=-4 \Rightarrow 0=-4$ Absurdo $\Rightarrow SI \therefore$ $\boxed{SI \Leftrightarrow k=-2}$

$k=2$

Reemplazamos en $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & k^2-5 & k \end{array}\right)$ por $k=2$ y se obtiene $\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & (1) & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow r(A)=r(A')=2<3 \Rightarrow SCI \therefore$ $\boxed{SCI \Leftrightarrow k=2}$

$$c)\begin{cases} x \quad\quad + 3z = 1 \\ 3x+2y- \ z=2 \\ x+ \ y-kz=3 \end{cases}$$

Por determinantes y Gauss Jordan:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2k+1)+3\cdot(1) = -2k+1+3 = -2k+4 \Rightarrow \boxed{\Delta(A)=-2(k-2)}$$

$SCD \Leftrightarrow \Delta(A)\neq 0 \quad \therefore$ $\boxed{SCD \Leftrightarrow k\neq 2}$

$\boldsymbol{k=2}$ Reemplazamos en $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -k & 3 \end{array}\right)$ por $\boldsymbol{k=2}$ y se obtiene $\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -10 & -1 \\ 0 & (1) & -5 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$

Como en la segunda fila resulta $\mathbf{0}.x+\mathbf{0}.y+\mathbf{0}.z=-5 \Rightarrow 0=-5$ Absurdo $\Rightarrow SI \therefore$ $\boxed{SI \Leftrightarrow k=2}$

d) $\begin{cases} x+\ \ y+kz=2 \\ 3x+4y+2z=k \\ 2x+3y-\ \ z=1 \end{cases}$

Por determinantes y Gauss Jordan:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + k\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$=1\cdot(-10)-1\cdot(-7)+k\cdot(1)=-3+k \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta=-3+k} \qquad SCD \Leftrightarrow \Delta(A)\neq 0 \quad \therefore \quad \boxed{SCD \Leftrightarrow k\neq 3}$$

$\boldsymbol{k=3}$

Reemplazamos en $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 3 & 4 & 2 & k \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$ por $\boldsymbol{k=3}$ y se obtiene $\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & (1) & -7 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \end{array}\right) \approx$

$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & -5 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad r(A)=r(A')=2<3$ (nro. de incog.) $\quad \boxed{SCI \Leftrightarrow k=3}$

9) Sea $A=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right)$ la matriz ampliada de un sistema lineal. ¿Para qué valores de **"*a*"** y de **"*b*"** el sistema:

a) Tiene solución única?
b) Es compatible indeterminado y el rango de la matriz del sistema es igual a **2**?
c) Es compatible indeterminado y tiene dos variables libres?
d) Es incompatible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right) F_1 \cdot \frac{1}{a} \Leftrightarrow a \neq 0 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 0 & \frac{b}{a} & \frac{2}{a} \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{b}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & a & 4-b & 2 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right) F_2 \cdot \frac{1}{a} \Leftrightarrow a \neq 0 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{b}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & (1) & \frac{4-b}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{b}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 1 & \frac{4-b}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & a & b-2 & b-2 \end{array}\right) \boxed{*} \approx$$

$$F_3 \cdot \frac{1}{b-2} \Leftrightarrow b-2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 2$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{b}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 1 & \frac{4-b}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & a & (1) & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2-b}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b-2}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

1) $r(A)=3$, $r(A')=3$ y $n=3$, el sistema es ***SCD*** si y sólo si $a \neq 0 \wedge b \neq 2$

2) En $\boxed{*}$ si $a \neq 0 \wedge b = 2$ no podemos tomar $(b-2)$ como pivote. Si $b=2$ nos queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 1 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $r(A)=r(A')=2<3$, el sistema es ***SCI***

$n-h = 3-2 = 1$ grado de libertad

3) $a=0 \;\wedge\; b\neq 2$

Partiendo del enunciado, reemplazam os a a por $\mathbf{0}$ entonces se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & b \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & (1) & \frac{b}{2} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \frac{4-b^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4-2b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \end{array}\right) F_2 . \frac{1}{4-2b} \Leftrightarrow \begin{matrix} 4-2b\neq 0 \\ b\neq 2 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \frac{4-b^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & (1) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=1$ y $r(A')=2$

$\therefore \quad 1\neq 2$ $\Rightarrow$ el sistema es SI

4) $a=0 \;\wedge\; b=2$ La matriz original nos queda al reemplazar por estos valores

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) F_3 \frac{1}{2} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & (1) & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$r(A)=1,\; r(A)=1<3.$ El sistema es SCI. $n-h=3-1=2$ grado de libertad

Resumen de las respuestas del ejercicio
$a)$ Tiene solución única cuando $a\neq 0 \wedge b\neq 2$
$b)$ Es SCI, el rango de la matriz del sistema es $\mathbf{2}$ cuando $a\neq 0 \wedge b=2$
$c)$ Es SCI y tiene dos variables libres cuando $a=0 \wedge b=2$
$d)$ Es SI cuando $a=0 \wedge b\neq 2$

10) El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 2q \\ 2x - 3y + 2z = 4q \\ 3x - 2y + pz = q \end{cases}$ es incompatible para:

a) $p = 3 \quad q \neq 0$ ***b)*** $p \neq 3 \quad q \neq 0$ ***c)*** $p \neq 3 \quad q = 0$ ***d) Ninguna de las anteriores***

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & 2q \\ 2 & -3 & 2 & 4q \\ 3 & -2 & p & q \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2q \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & p-3 & -5q \end{array}\right) F_2.\left(-\frac{1}{5}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2q \\ 0 & (1) & 0 & 0 \\ 0 & -5 & p-3 & -5q \end{array}\right) \approx\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2q \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p-3 & -5q \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{El sistema es incompatible} \Leftrightarrow p = 3 \wedge q \neq 0}$ opción correcta ***a)***

11) Determinar el valor de $m \in \Re$ para que los siguientes sistemas sean equivalentes: $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = 2 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$

Dos sistemas son equivalentes si y sólo si tienen el mismo conjunto solución

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = 2 \\ x - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & (1) & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Observando la última fila $0.x + 0.y + 0.z = 2 \Rightarrow \boxed{0 = 2}$ Absurdo $\Rightarrow$ determinamos que el sistema es incompatible

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \\ x - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & m-1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) F_3.(-1) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & m-1 & 2 \\ 0 & (1) & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & m-3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

En la segunda fila si $\boxed{m = 3}$ entonces resulta $0.x + 0.y + 0.z = 2 \Rightarrow \boxed{0 = 2}$ Absurdo $\Rightarrow$ determinamos que el sistema es incompatible

12) ***a)*** Hallar los valores de $k \in \Re$ para los que el vector $(1;4)$ es la única solución del sistema: $\begin{cases} 3x + 3y = 15 \\ 2x + (k+1)y = -6 \\ 4x + (k+4)y = 8 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + 3y = 15 \\ 2x + (k+1)y = -6 \\ 4x + (k+4)y = 8 \end{cases} \Rightarrow \text{Reemplazamos } (1;4) \begin{cases} 3.1 + 3.4 \stackrel{?}{=} 15 \to \boxed{15 = 15} \\ 2.1 + (k+1).4 = -6 \to 6 + 4k = -6 \to \boxed{k = -3} \\ 4.1 + (k+4).4 = 8 \to 20 + 4k = 8 \to \boxed{k = -3} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Para que } (1;4) \text{ sea la única solución}: k = -3}$

b) Hallar los valores de $k \in \Re$ para los que las siguientes rectas se intersecan en el punto $(3;-2)$: $\begin{cases} 1x + 3y = -3 \\ -2x + (k-3)y = -4 \\ 3x + 2y = (k+3) \end{cases}$

$$\begin{cases} 1x + 3y = -3 \\ -2x + (k-3)y = -4 \\ 3x + 2y = (k+3) \end{cases} \Rightarrow \text{Reemplazamos } (3;-2) \begin{cases} 1.3 + 3.(-2) \stackrel{?}{=} -3 \to \boxed{-3 = -3} \\ -2.3 + (k-3).(-2) = -4 \to -2k = -4 \to \boxed{k = 2} \\ 3.3 + 2.(-2) = k + 3 \to 5 = k + 3 \to \boxed{k = 2} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Las rectas se intersecan en } (3;-2) \text{ si } k = 2}$

c) Hallar todos los valores de $k \in \Re$ para los que el conjunto solución del sistema $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2ky = 2/3 \end{cases}$ es la recta $3x - 2 = y$

$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2ky = 2/3 \end{cases}$ Multiplicamos MaM por 3: $3x + 6ky = 2$

Para que la intersección sea la recta $y = 3x - 2$ es necesario que $6k = -1 \Rightarrow \boxed{k = -1/6}$

13) ***a)*** Analizar si el vector $(2;4;-1)$ es solución del sistema $\begin{cases} 2x-3y+2z=-10 \\ x-2y+3z=-9 \\ 5x+z=9 \end{cases}$ ***b)*** En caso de serlo, analizar si es única.

$$a)\begin{cases} 2x-3y+2z=-10 \\ x-2y+3z=-9 \\ 5x+z=9 \end{cases} \Rightarrow \text{Reemplazamos } (2;4;-1) \begin{cases} 2.2-3.4+2.(-1)\overset{?}{=}-10 \rightarrow \boxed{10=10} \\ 2-2.4+3.(-1)\overset{?}{=}-9 \rightarrow \boxed{-9=-9} \\ 5.2+(-1)\overset{?}{=}9 \rightarrow \boxed{9=9} \end{cases}$$

$b)(2;4;-1)$ es solución del sistema ¿es única?

Como el sistema es cuadrado calculamos su determinante, si es distinto de cero el sistema es compatible determinado por lo tanto la solución es única, si es cero es una de las infinitas soluciones.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5.(-9+4)+1.(-4+3)=-5-1=-6\neq 0 \quad \therefore \boxed{(2;4;-1)\text{ es solución única}}$$

14) La solución general del sistema $\begin{cases} x+3y+2z-w=0 \\ 2x-3y-2z+w=0 \\ -3y-2z+w=0 \end{cases}$ es

a) $S=\left\{(x;y;z;w)\in\Re^4 \,/\, x=1 \wedge w=\dfrac{9y+6z}{3}\right\}$ ***b)*** $S=\{(x;y;z;w)\in\Re^4 \,/\, x=y=z=w=0\}$

c) $S=\{(x;y;z;w)\in\Re^4 \,/\, x=0 \wedge w=3y+2z\}$ ***d)*** Ninguna de las anteriores

$$\left(\begin{array}{cccc|c} (1) & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & (1) & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -3y-2z+w=0 \Rightarrow w=3y+2z \end{cases}$$

$\boxed{S=\{(x;y;z;w)\in\Re^4 \,/\, x=0 \wedge w=3y+2z\}}$ opción correcta **c)**

15) Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} kx - 3y = 2 \\ 2kx + (k-5)y = k \end{cases}$ Analizar las cuatro posibilidades e indique cuáles son las correctas, justificando:

a) si $k = 3$ el sistema es compatible determinado.

b) si $k = 2$ entonces $s = (4;2)$ es una de las infinitas soluciones del sistema.

c) si $k = -2$ el sistema es compatible indeterminado.

d) si $k = 0$ el sistema es incompatible.

Se encuentran los valores de $k \in \Re$ para los cuales el sistema tiene o no tiene solución $\begin{cases} kx & -3y = 2 \\ 2kx + & (k-5)y = k \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & -3 & 2 \\ 2k & k-5 & k \end{array}\right) F_1.(-1/3) \approx \left(\begin{array}{cc|c} \frac{-k}{3} & (1) & \frac{-2}{3} \\ 2k & k-5 & k \end{array}\right) \approx \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \frac{-k}{3} & 1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{k+k^2}{3} & 0 & \frac{5k-10}{3} \end{array}\right)}_{*} \approx F_2 . \underbrace{\frac{3}{k+k^2}}_{\substack{\Leftrightarrow k+k^2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow k\neq 0 \wedge k \neq -1}} \approx \left(\begin{array}{cc|c} \frac{-k}{3} & 1 & \frac{-2}{3} \\ (1) & 0 & \frac{5k-10}{k+k^2} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{-2}{3} + \frac{5(k-2)}{3(k+1)} \\ 1 & 0 & \frac{5k-10}{k+k^2} \end{array}\right)$$

$$r(A) = r(A') = 2 \Rightarrow \boxed{SCD \Leftrightarrow k \neq 0 \wedge k \neq -1}$$

Si $k = 0$ reemplazando en "$*$" $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-10}{3} \end{array}\right) F_2.\left(-\frac{3}{10}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & (1) \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $r(A) \neq r(A') \Rightarrow \boxed{SI \Leftrightarrow k = 0}$

Si $k = -1$ reemplazando en "$*$" $\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{3} & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right) F_2.\left(-\frac{1}{5}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{3} & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & (1) \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $r(A) \neq r(A') \Rightarrow \boxed{SI \Leftrightarrow k = -1}$

Del resultado anterior se deduce que las opciones correctas son ***a)*** y ***d)***

Podemos resolver de otra forma: reemplazando en cada ítem y evaluar la proposición

$a)$ Si $k=3 \Rightarrow SCD$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \end{array}\right) F_1.(1/3) \approx \left(\begin{array}{cc|c} (1) & -1 & \frac{2}{3} \\ 6 & -2 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right) F_2.(1/4) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & (1) & \frac{-1}{4} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{12} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A')=2 \Rightarrow S=\left\{\left(\frac{5}{12};-\frac{1}{4}\right)\right\}$

$\boxed{SCD \Leftrightarrow k=3}$ ***VERDADERO***

$b)$ Si $k=2 \Rightarrow (4;2)$ es una de las infinitas soluciones

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \end{array}\right) F_1.(1/2) \approx \left(\begin{array}{cc|c} (1) & -\frac{3}{2} & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{array}\right) F_2.(1/3) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & (1) & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A')=2 \Rightarrow S=\left\{\left(0;-\frac{2}{3}\right)\right\}$

$\boxed{SCD \Leftrightarrow k=2}$ **FALSO**

c) Si $k=-2 \Rightarrow SCI$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & 2 \\ -4 & -7 & -2 \end{array}\right) F_1.(-1/2) \approx \left(\begin{array}{cc|c} (1) & \frac{3}{2} & -1 \\ -4 & -7 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & -6 \end{array}\right) F_2.(-1) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & (1) & 6 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A')=2 \Rightarrow S=\{(-10;6)\}$ $\boxed{SCD \Leftrightarrow k=-2}$ **FALSO**

$d)$ Si $k=0 \Rightarrow SI$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) F_1.(-1/3) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0 & (1) & -\frac{2}{3} \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)\right) F_2.(-1/2) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & (1) \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$r(A) \neq r(A') \Rightarrow$ $\boxed{SI \Leftrightarrow k=0}$ ***VERDADERO***

16) Sabiendo que $s = (1;1;1)$ es solución del sistema $\begin{cases} 3ax + 2by + z = -4 \\ bx + y - az = 1 \\ -4x - y + 2z = -3 \end{cases}$ Analizar las cuatro posibilidades e indique cuál es la correcta:

a) $a = b = -1$

$$\begin{cases} -3x - 2y + z = -4 \\ -x + y + z = 1 \\ -4x - y + 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & (1) & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) F_2 . \frac{1}{2} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 1 & -4 \\ (1) & 3/2 & 0 & 5/2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5/2 & 1 & 7/2 \\ 1 & 3/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$r(A) = r(A') = 2 < 3 \Rightarrow SCI \quad \begin{cases} \frac{5}{2}y + z = \frac{7}{2} & \Rightarrow z = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}y \\ x + \frac{3}{2}y = \frac{5}{2} & \Rightarrow x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}y \end{cases}$$

Si $y = 1 \Rightarrow x = 1, z = 1$

luego $s = (1;1;1)$ es una de las infinitas soluciones del sistema

VERDADERO

b) si $a = b = -1$ el sistema es compatible determinado. **FALSO** por ***a)***

c) $h = (2z;\ 2z;\ z)$ es la solución del sistema homogéneo asociado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & (1) & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) F_2 . \frac{1}{2} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 1 & 0 \\ (1) & 3/2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5/2 & 1 & 0 \\ 1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) r(A) = r(A') = 2 < 3 \Rightarrow SCI \begin{cases} \frac{5}{2}y + z = 0 \Rightarrow z = -\frac{5}{2}y \\ x + \frac{3}{2}y = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y \end{cases}$$

$$S = \left\{\left(-\frac{3}{2}y; y; -\frac{5}{2}y\right)\right\} \neq \left\{(2z;2z;2z)\right\} \textit{FALSO}$$

d) **(2/5; –2/5; 0)** es una solución del sistema homogéneo asociado. **FALSO por item c)**

17) La siguiente es una matriz ampliada de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & k & 2 & 2 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k-1 \end{array}\right)$

Analizar las cuatro posibilidades e indique cuál es la correcta, justificando:

a) Si $\boldsymbol{k = 1}$ el sistema es incompatible.
b) Si $\boldsymbol{k = -1}$ el sistema es incompatible.
c) Si $\boldsymbol{k = 0}$ el sistema tiene solución única.
d) Si $\boldsymbol{k = 2}$ entonces $\boldsymbol{s = (2/3;\ 2/3;\ 1/3)}$ es una de las infinitas soluciones del sistema.

Se encuentran los valores de $k \in \Re$ para los cuales el sistema tiene o no tiene solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & k & 2 & 2 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k-1 \end{array}\right) F_2 . \frac{1}{2} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{k}{2} & (1) & 1 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k-1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+\frac{k}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{k}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-k.\left(k^2-1\right)}{2} & 0 & k-k^2 \end{array}\right) F_3 . \frac{-2}{k(k^2-1)} \Leftrightarrow k(k^2-1) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0 \wedge k \neq 1 \wedge k \neq -1 \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+\frac{k}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{k}{2} & 1 & 1 \\ 0 & (1) & 0 & \frac{2}{1+k} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{k}{1+k} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+k} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{1+k} \end{array}\right) \quad r(A) = r(A') = 3 = n^o\ de\ Incógnitas \Rightarrow \boxed{SCD \Leftrightarrow k \neq 0 \wedge k \neq 1 \wedge k \neq -1}$$

Si $k=0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SCI

Si $k=1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow SCI$

Si $k=-1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{k}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow SI$

Analizamos cada uno de los ítems:

a) Si $k=1$ el sistema es incompatible ***FALSO***

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow SCI$$

b) Si $k=-1$ el sistema es incompatible ***VERDADERO***

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow SI$$

c) Si $k=0$ el sistema tiene solución única ***FALSO***

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) F_2 \cdot \frac{1}{2} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & (1) & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow SCI$$

d) Si $k=2$ entonces $s=(2/3,\ 2/3,\ 1/3)$ es una de las infinitas soluciones del sistema **FALSO**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) F_2 \cdot \frac{1}{2} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & (1) & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) F_3 \cdot \frac{1}{3} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (1) & \frac{1}{3} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xRightarrow{SCD} S=\left\{\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)\right\}$$

18) La siguiente es la matriz ampliada de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k^2-4 & -1 & k^2-2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Analizar las cuatro posibilidades e indique cuál es la correcta, justificando:

a) Si $k=-2$ ó $k=2$ el sistema tiene infinitas soluciones

b) La única solución del sistema para $k=-2$ $s=(1;\ 0;\ 0)$

c) El sistema no admite solución si $k=3$

d) Si $k=0$ el sistema es compatible determinado

Se encuentran los valores de $k \in \Re$ para los cuales el sistema tiene o no tiene solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k^2-4 & -1 & k^2-2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2.(-1)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -k^2+4 & (1) & -k^2+2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3k^2-14 & 0 & 3k^2-2k+1 \\ 0 & -k^2+4 & 1 & -k^2+2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema siempre tiene solución: $\forall\ k \in \Re$ el sistema es compatible indeterminado. La única respuesta correcta es la ***a)***

Otro forma de resolverlo

a) Si $k=-2$ ó $k=2$ el sistema tiene infinitas soluciones VERDADERO

$$\boxed{k=-2} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \ \textit{SCI} \qquad \boxed{k=2} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \ \textit{SCI}$$

b) La única solución del sistema para $k=-2$ es $s=(1;0;0)$ **FALSO**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \ \text{SCI}$$

c) El sistema no admite solución si $k=3$ **FALSO**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \ \text{SCI}$$

d) Si $k=0$ el sistema es compatible determinado **FALSO**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \ \textit{SCI}$$

19) Una caja contiene **13 monedas** con las denominaciones de **un centavo, cinco centavos** y **diez centavos**, con un valor total de **83 centavos**. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay en la caja? (Recuerde que busca soluciones enteras).

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x + 5y + 10z = 83 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 5 & 10 & 83 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 9 & 70 \end{array}\right) F_2 . \frac{1}{4} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & (1) & \frac{9}{4} & \frac{35}{2} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{35}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} r(A) = r(A') = 2 \\ 2 < 3(\text{n° de incógnitas}) \\ \Rightarrow SCI \end{array}$$

$$\begin{cases} x - \frac{5}{4}z = -\frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{9}{2} + \frac{5}{4}z} * \\ y + \frac{9}{4}z = \frac{35}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{35}{2} - \frac{9}{4}z} * \end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones, pero se deben encontrar las soluciones que satisfagan nuestro problema.

Como x, y, z representan el número de monedas de **1**, **5** y **10** centavos, estos números deben ser positivos y enteros

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{9}{2} + \frac{5}{4}z > 0 \Rightarrow z > \frac{9}{2} . \frac{4}{5} \Rightarrow z > \frac{18}{5} \\ \frac{35}{2} - \frac{9}{4}z > 0 \Rightarrow \frac{35}{2} . \frac{4}{9} > z \Rightarrow z < \frac{70}{9} \end{array}\right\} \boxed{\frac{18}{5} < z < \frac{70}{9}}$$

posibles valores de z: **4,5,6** o **7**

El único valor que resuelve el problema es $\boxed{z = 6}$ y reemplazando en "$*$" $\boxed{x = 3}$, $\boxed{y = 4}$

20) Un campesino alimenta su ganado con una mezcla de dos tipos de alimento. Una unidad estándar del **tipo A** suministra a una cabeza de ganado **10%** de sus requerimientos diarios mínimos de proteínas y **15%** de carbohidratos.
El **tipo B** contiene, en una unidad estándar **12 %** del requerimiento de proteínas y **8 %** del de carbohidratos.
Si el campesino desea dar a sus animales el **100%** de sus requerimientos mínimos. ¿Cuántas unidades de alimentos debe dar a cada cabeza de ganado diariamente?
Como se necesita que la mezcla tenga el **100%** de los requerimientos entonces el sistema a plantear es:

$$\begin{cases} 10A + 12B = 100 \\ 15A + 8B = 100 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 12 & 100 \\ 15 & 8 & 100 \end{array}\right) F_1.(1/10) \approx \left(\begin{array}{cc|c} (1) & \frac{6}{5} & 10 \\ 15 & 8 & 100 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{6}{5} & 10 \\ 0 & -10 & -50 \end{array}\right) F_1.(-1/10) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{6}{5} & 10 \\ 0 & (1) & 5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{S = \{(4;5)\}}$$

21) Un grupo de **18** personas (hombres, mujeres y jóvenes) ganan un total de **$ 250** por hora. Los hombres ganan **$ 20** por hora, las mujeres **$ 15** por hora y los jóvenes **$10** por hora. Halle el número de hombres, mujeres y jóvenes.

x **:** número de hombres **,** y **:** número de mujeres **,** z **:** número de jóvenes

$$\begin{cases} x + y + z = 18 \\ 20x + 15y + 10z = 250 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & 18 \\ 20 & 15 & 10 & 250 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & -5 & -10 & -110 \end{array}\right) F_2 . -\frac{1}{5} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & (1) & 2 & 22 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 22 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A') = 2 \quad \wedge \quad n = 3$ es SCI $\qquad n - h = 3 - 2 = 1$ grado de libertad

$$\begin{cases} x - z = -4 \Rightarrow x = -4 + z > 0 \Rightarrow z > 4 \\ y + 2z = 22 \Rightarrow y = 22 - 2z > 0 \Rightarrow z < 11 \end{cases}$$

$$\boxed{S = \{ (x ; y ; z) \ / \ x = -4 + z \ \wedge \ y = 22 - 2z \ \wedge \ 4 < z < 11 \ \wedge \ z \in N \}}$$

22) Una empresa confecciona banderas, camisetas y gorros. En el mes de marzo entraron **40 metros de tela** y **20 rollos de hilo**. Cada bandera necesita **4 m de tela** y **2 rollos de hilo**. Cada camiseta necesita **2 m de tela** y **1 rollo de hilo**. Los gorros usan **1 m de tela** y **1 rollo de hilo**. Si se consumen totalmente las materias primas que ingresaron en marzo.

a) Hallar la solución general del sistema.

b) ¿Es toda solución del sistema una solución del problema? Justificar

c) Hallar todas las soluciones del problema.

d) Decidir si es posible fabricar todos los productos.

	metros de tela	*rollos de hilo*
Banderas	4	2
Camisetas	2	1
Gorros	1	1
Disponibilidad	40	20

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + z = 40 \\ 2x + y + z = 20 \end{cases}$$

$$a) \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & (1) & 40 \\ 2 & 1 & 1 & 20 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 40 \\ -2 & -1 & 0 & -20 \end{array}\right) F_2 .(-1) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 40 \\ 2 & (1) & 0 & 20 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 20 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 2x + y = 20 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{(x; y; z) \in \Re \ / \ y = 2x - 20 \wedge z = 0\}}$$

b) $\boxed{\text{No}}$, el sistema es compatible indeterminado, las infinitas soluciones tienen coordenadas reales.

c) $\boxed{0 \le x \le 10 \ \wedge \ 0 \le y \le 20}$

d) $\boxed{\text{No, ya que el número de gorros es cero}}$

23) Un departamento de Caza y Pesca Estatal suministra tres tipos de alimentos a un lago que mantiene a tres especies de peces. Cada pez de la **especie I** consume cada semana un promedio de una unidad de **alimento 1**, una unidad de **alimento 2**, y dos unidades de **alimento 3**. Cada pez de la **especie II** consume cada semana un promedio de tres unidades de **alimento 1**, cuatro unidades de **alimento 2** y cinco unidades de **alimento 3**.

Para un pez de la **especie III**, el consumo semanal promedio es de dos unidades del **alimento 1**, una unidad del **alimento 2** y cinco unidades del **alimento 3.**

Cada semana se proporcionan al lago **15.000** unidades de alimento 1, **10.000** unidades del segundo y **35.000** del tercero. Suponemos que los tres alimentos se consumen ¿qué población de cada especie se encontrara en coexistencia? ¿Existe una solución única?

$$\begin{cases} x+3y+2z=15000 \\ x+4y+\ \ z=10000 \\ 2x+5y+5z=35000 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 3 & 2 & 15000 \\ 1 & 4 & 1 & 10000 \\ 2 & 5 & 5 & 35000 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 15000 \\ 0 & (1) & -1 & -5000 \\ 0 & -1 & 1 & 5000 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 30000 \\ 0 & 1 & -1 & -5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x+5z= 30000 \Rightarrow x=30000-5z>0 \Rightarrow z<6000 \\ y-\ \ z=-5000 \Rightarrow y=-5000+\ \ z>0 \Rightarrow z>5000 \end{cases} \Rightarrow 5000<z<6000$$

$$\boxed{S=\{(x;y;z)\ /\ x=30000-5z \wedge y=-5000+z \wedge 5000<z<6000 \wedge z\in \mathbb{Z}\}}$$

24) Una compañía fabrica tres tipos de muebles para jardín: sillas, mecedoras y sillones. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se muestra en la tabla. La compañía tiene un almacén de **400** unidades de madera, **600** de plástico y **1500** de aluminio. Para su producción de final de temporada la compañía desea agotar todas las existencias. Para lograrlo ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

	Madera	Plástico	Aluminio
Sillas	1	1	2
Mecedoras	1	1	3
Sillones	1	2	5

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=\ 400 \\ x+\ \ y+2z=\ 600 \\ 2x+3y+5z=1500 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & 400 \\ 1 & 1 & 2 & 600 \\ 2 & 3 & 5 & 1500 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 0 & (1) & 200 \\ 0 & 1 & 3 & 700 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & (1) & 0 & 100 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \end{array}\right) \quad \boxed{S=\{(100;100;200)\}}$$

25) Cuando la gente invierte dinero hay profesionales a quienes se acude en busca de orientación respecto al portafolio o cartera que mejor cubra las necesidades del inversionista. Supóngase que un inversionista ha consultado a un experto en inversiones. Después de conversar con el cliente, el experto decide que el cliente desea una cartera que posea las siguientes cualidades:

1) el valor total de cartera en el momento de la compra es **$ 50.000.**

2) el crecimiento anual esperado en el valor de mercado es de **12%.**

3) el factor promedio de riesgo es de **10%.**

Se han identificado tres opciones con las tasas relativas de crecimiento y riesgo que aparecen en la siguiente tabla.

Inversión	Crecimiento anual esperado en el valor de mercado	Riesgo previsto
1	16 %	12 %
2	8 %	9 %
3	12 %	8 %

Determinar si hay una estrategia de inversión que satisfaga los deseos del cliente.

$$\begin{cases} x+y+z=50.000 \\ 0,16x+0,08y+0,12z=6.000 \\ 0,12x+0,09y+0,08z=5.000 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 50.000 \\ 0,16 & 0,08 & 0,12 & 6000 \\ 0,12 & 0,09 & 0,08 & 5000 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} (1) & 1 & 1 & 50.000 \\ 16 & 8 & 12 & 600.000 \\ 12 & 9 & 8 & 500.000 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 50.000 \\ 0 & -8 & -4 & -200.000 \\ 0 & -3 & -4 & -100.000 \end{array}\right) \approx F_2 .-\frac{1}{4} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 50.000 \\ 0 & 2 & (1) & 50.000 \\ 0 & -3 & -4 & -100.000 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 50.000 \\ 0 & 5 & 0 & 100.000 \end{array}\right) \approx_{F_3 . \frac{1}{5}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 50.000 \\ 0 & (1) & 0 & 20.000 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 20.000 \\ 0 & 0 & 1 & 10.000 \\ 0 & 1 & 0 & 20.000 \end{array}\right) \quad \boxed{S=\{(20.000\,;20.000\,;10.000)\}}$$

26) Una compañía de inversiones vende tres tipos de fondos de inversión: Classic (C), de Lujo (L) y Gold (G). Cada unidad de **C** tiene **12 acciones tipo A**, **16 tipo B** y **8 tipo C**. Cada unidad de **L** tiene **20 acciones tipo A**, **12 tipo B** y **28 tipo C**. Cada unidad de **G** tiene **32 acciones tipo A**, **28 tipo B** y **36 tipo C**.

Un inversionista desea comprar exactamente **220** acciones tipo **A**, **176** tipo **B** y **264** tipo **C** comprando unidades de los tres fondos. Determinar, si es posible, las combinaciones de unidades **C**, **L** y **G** que satisfagan los requerimientos del inversionista.

	Tipo A	*Tipo B*	*Tipo C*
Classic	12	16	8
Lujo	20	12	28
Gold	32	28	36
Deseo de compra	220	176	264

$$\Rightarrow \begin{cases} 12x+20y+32z=220 \\ 16x+12y+28z=176 \\ 8x+28y+36z=264 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 20 & 32 & 220 \\ 16 & 12 & 28 & 176 \\ 8 & 28 & 36 & 264 \end{array}\right) F_1.1/12 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 5/3 & 8/3 & 55/3 \\ 16 & 12 & 28 & 176 \\ 8 & 28 & 36 & 264 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 8/3 & 55/3 \\ 0 & -44/3 & -44/3 & -352/3 \\ 0 & 44/3 & 44/3 & 352/3 \end{array}\right) F_2.(-3/44) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 8/3 & 55/3 \\ 0 & (1) & 1 & 8 \\ 0 & 44/3 & 44/3 & 352/3 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+z=5 \to z=5-x \\ y+z=8 \to z=8-y \end{cases} \Rightarrow 5-x=8-y \Rightarrow y=3+x$$

Como $x=5-z>0 \Rightarrow z<5 \quad \wedge \quad y=8-z>0 \Rightarrow z<8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{0<z<5}$

Las restricciones de las variables: $\boxed{0<x<5} \quad \wedge \quad \boxed{3<y<8} \quad \wedge \quad \boxed{0<z<5}$

Soluciones que cumplen con las restricciones:

(1;4;4) (2;5;3) (3;6;2) (4;7;1)

27) Sea $p = \frac{8}{100}q + 50$ la ecuación de oferta para cierto fabricante, y supóngase que la ecuación de demanda para su producto sea $p = -\frac{7}{100}q + 65.$

a) Determinar el precio de equilibrio

b) Si se carga un impuesto de **$ 1,50** por unidad al fabricante ¿Cómo se verá afectado el precio original de equilibrio si la demanda permanece igual?

c) Determinar los ingresos totales que obtiene el fabricante en el punto de equilibrio tanto antes como después del impuesto.

Ecuación de la oferta $p = \frac{8}{100}q + 50$ Ecuación de la demanda $p = -\frac{7}{100}q + 65$

Antes del impuesto : $\mathbf{p}_{venta} = \mathbf{p}_{compra}$

$$\frac{8}{100}q + 50 = -\frac{7}{100}q + 65$$

$$\frac{8}{100}q + \frac{7}{100}q = 65 - 50$$

$$\frac{15}{100}q = 15 \Rightarrow \boxed{q = 100} \Rightarrow \boxed{p = \$58} \quad \therefore \quad I = D.P = 100.58 = 5800 \Rightarrow \boxed{I = \$5800}$$

Ecuación de la oferta $p = \frac{8}{100}q + 50$ Ecuación de la demanda $p = -\frac{7}{100}q + 65$

Después del impuesto : $\underbrace{p_{nc}}_{\text{precio nuevo de compra}} = \underbrace{p_{vv}}_{\text{precio viejo de venta}} + \underbrace{1,50}_{\text{impuesto}}$

$$-\frac{7}{100}q + 65 = \frac{8}{100}q + 50 + 1,50 =$$

$$65 - 50 - 1,50 = \frac{8}{100}q + \frac{7}{100}q$$

$$13,50 = \frac{15}{100}q \Rightarrow \boxed{q = 90} \Rightarrow \boxed{p = \$58,70} \quad \therefore \quad I = D.P = 90.58,70 = 5283 \Rightarrow \boxed{I = \$5283}$$

28) Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son: $3q-200p+1800=0$ y $3q+100p-1800=0$ respectivamente, en donde ***"p"*** representa el precio por unidad y ***"q"*** el número de unidades por intervalo.

a) Obtener el precio de equilibrio. Grafique.

b) Determinar el precio de equilibrio cuando se carga al proveedor con un impuesto de **27 centavos** por unidad.

Oferta $3q-200p+1800=0 \Rightarrow p_v=\frac{3}{200}q+9$ Demanda $3q+100p-1800=0 \Rightarrow p_c=-\frac{3}{100}q+18$

Antes del impuesto:

$$\begin{aligned}
p_{venta} &= p_{compra}\\
\frac{3}{200}q+9 &= -\frac{3}{100}q+18\\
\frac{3}{200}q+\frac{3}{100}q &= 18-9\\
\frac{9}{200}q &= 9 \quad\Rightarrow\quad \boxed{q=200} \quad\Rightarrow\quad \boxed{p=\$12}
\end{aligned}$$

Ecuación de la oferta $p_{venta}=\frac{3}{200}q+9$ Ecuación de la demanda $p_{compra}=-\frac{3}{100}q+18$

Después del impuesto:

$$\begin{aligned}
\underbrace{p_{nc}}_{\text{precio nuevo de compra}} &= \underbrace{p_{vv}}_{\text{precio viejo de venta}} + \underbrace{0,27}_{\text{impuesto}}\\
-\frac{3}{100}q+18 &= \frac{3}{200}q+9+0,27\\
-\frac{3}{100}q+18 &= \frac{3}{200}q+9+0,27\\
18-9-0,27 &= \frac{3}{200}q+\frac{3}{100}q\\
8,73 &= \frac{9}{200}q \quad\Rightarrow\quad \boxed{q=194} \quad\Rightarrow\quad \boxed{p=\ \$12,18}
\end{aligned}$$