UNIDAD TEMÁTICA 4

ESPACIO VECTORIAL

1) ***a)*** Investigar si $(\mathbf{V};+;\Re;\ .\ )$ es un subespacio vectorial de $\left(\Re^2;+;\Re;.\right)$ con las operaciones usuales definidas en $\Re^2$, siendo

$V = \{ (x;y) \in \Re^2 \ / \ y = 2x \}$

b) Completar y tachar lo que no corresponde:
Observar que este conjunto está representado por la recta....................., que **SI / NO** pasa por el origen. Representar gráficamente.

2) ***a)*** Investigar si $(\mathbf{W};+;\Re;\ .\ )$ es un subespacio vectorial de $\left(\Re^2;+;\Re;.\right)$ con las operaciones usuales definidas en $\Re^2$, siendo

$W = \{ (x;y) \in \Re^2 \ / \ y = mx + b \wedge b \neq 0 \}$

b) Completar y tache lo que no corresponde:
Observar que este conjunto está representado por la recta........................, que **SI / NO** pasa por el origen. Representar gráficamente.

3) Dado $W = \{ (x\,;\,y) \in \Re^2 \ / \ |\ x\ | + |\ y\ | = 0 \}$.Indicar cual proposición es verdadera

a) W es un subespacio trivial de $\Re^2$

b) $(-3;3) \in W$

c) $W = \varnothing$

d) Ninguna de las anteriores

4) Indicar si cada uno de los siguientes conjuntos son subespacios del espacio correspondiente justificando la respuesta.

i) $(\Re^2;+;\Re;.)$

a) $H=\{(x;y)\in\Re^2 / x^2+y^2<0\}$

b) $H=\{(x;y)\in\Re^2 / |x+y|\geq 0\}$

c) $H=\{(x;y)\in\Re^2 / 3x+y=0\}$

d) $H=\{(x;y)\in\Re^2 / x+y-2=0\}$

ii) $(\Re^3;+;\Re;.)$

a) $H=\{(x;y;z)\in\Re^3 / x=3y \ \wedge \ z=-y\}$

b) $H=\{(x;y;z)\in\Re^3 / y=3\}$

c) $H=\{(x;y;z)\in\Re^3 / x+y-3=2z\}$

d) $H=\{(x;y;z)\in\Re^3 / z=3x+y\}$

iii) $(\Re^{2x2};+;\Re;.)$

a) $H_1=\{A\in\Re^{2x2} \ / \ A \text{ es escalar}\}$

b) $H_2=\{A\in\Re^{2x2} \ / \ A \text{ es antisimétrica}\}$

c) $H_3=\{A\in\Re^{2x2} \ / \ A \text{ es ortogonal}\}$

d) $H_4=\{A\in\Re^{2x2} / a_{11}=2a_{12} \wedge \ a_{21}=-a_{22}\}$

e) $H_5=\{A\in\Re^{2x2} / a_{11}=4 \wedge \ a_{22}=a_{12}+a_{21}\}$

iv) $(\Re^4;+;\Re;.)$

a) $W_1=\{(x;y;z;w)\in\Re^4 / x+y+z=0\}$

b) $W_2=\{(x;y;z;w)\in\Re^4 / x=y+z \wedge w=0\}$

c) $W_3=\{(x;y;z;w)\in\Re^4 / x=0\}$

5) Verificar que el conjunto solución del sistema:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$ no es un subespacio de $(\Re^3;+;\Re;\,.)$

b) $\begin{cases} x + 2y - \ \ z = 0 \\ 3x + \ \ y + 2z = 0 \\ 4x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$ es un subespacio de $(\Re^3;+;\Re;\,.)$

6) Sean $\vec{v}_1 = (1;-3;\ 2)$ y $\vec{v}_2 = (2;-1;\ 1)$ pertenecientes a $\Re^3$

a) Escribir, si es posible, $\vec{v} = (4\ ;3\ ;-1)$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

b) ¿Es posible expresar $\vec{u} = (2\ ;1\ ;-3)$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

c) ¿Para qué valor de $k \in \Re$ **es** $(1\ ;12;\ k)$ una combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$?

d) Indicar qué condición deben cumplir los números reales ***a, b*** y ***c***, para que el vector $(a;b;c)$ sea una combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

7) Hallar k para que $\vec{v} = (k;1;\ 1)$ resulte combinación lineal de $\vec{u} = (0;2;1)$ y $\vec{w} = (1;-1;0)$

8) Determinar si el conjunto dado de vectores es **L.D**. o **L.I**

a) En $(\Re^3;+;\Re;.)$, $A = \{(3;1;1)\ ,\ (2;-1;5)\ ,\ (4;0;-3)\}$

b) En $(\Re^{2x2};+;\Re;.)$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$

c) En $(\Re^{2x3};+;\Re;.)$, $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

d) En $(\Re^2;+;\Re;.)$, $E = \{(1;1),(2;2)\}$

9) Determinar la o las condiciones que deben satisfacer los números **a, b, c** y **d** a fin de que los vectores $(a;b)$ y $(c;d)$ del espacio $(\Re^2;+;\Re;\,.)$ sean **LI**.

10) Analizar y decidir justificando si los siguientes pares de vectores son **LI** o **LD**.

a) **(1; 1), (2; 7)**

b) **(2; 4; 1), (8; 16; 4)**

c) **(5; 5; 10; 0; 5), (1; 1; 2; 0; 1)**

d) **(0; 0; 0), (–5; 7; 18)**

11) Hallar todos los $c \in \Re$ para que $A = \{(1-c\,;1+c),(1+c\,;1-c)\}$ sea linealmente independiente.

12) Determinar si el conjunto de vectores dado genera en cada caso el espacio vectorial indicado. En caso negativo, halle el subespacio generado.

i) $(\Re^2;+;\Re;.)$

a) $A_1 = \{(1;2),(3;4)\}$

b) $A_2 = \{(1;1),(2;2),(5;5)\}$

c) $A_3 = \{(1;1),(2;1),(2;2)\}$

ii) $(\Re^3;+;\Re;.)$

a) $B_1 = \{(1;1;1),(0;1;1),(0;0;1)\}$

b) $B_2 = \{(1;2;3),(-1;2;3),(5;2;3)\}$

c) $B_3 = \{(2;0;1),(3;1;2),(1;1,;1),(7;3;5)\}$

iii) $(\Re^{2x2};+;\Re;.)$

a) $C_1 = \left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

b) $C_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

13) Hallar todos los valores de $k \in \Re$, para que el vector $\vec{u} = (3; k-3; 2k)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores de $A = \{(2;0;4),(1;0;2)\}$.

14) Analizar si el vector $\vec{g} = (2;14;-34;7)$ pertenece al subespacio de $\Re^4$ generado por los vectores $\vec{v}_1 = (1;4;-5;2)$ y $\vec{v}_2 = (1;2;3;1)$.

15) Verificar que el conjunto $B = \{(1;1;1),(1;1;0),(1;0;0)\}$ es una base de $(\Re^3;+;\Re;.)$ Expresar el vector **(a; b; c)** como combinación lineal de los vectores de esa base.

16) Determine si el conjunto dado de vectores es una base del espacio vectorial indicado. En caso de no serlo, halle el subespacio generado, una base y su dimensión.

a) En $\Re^2$, el conjunto $\{(1;2),(1;0)\}$

b) En $\Re^3$, el conjunto $\{(1;2;-1),(1;0;2),(2;1;1)\}$

c) En $\Re^3$, el conjunto $\{(1;0;2),(3;-1;4)\}$

d) En $\Re^3$, el conjunto $\{(1;1;1),(3;0;1),(-1;2;3),(0;4;5)\}$

e) En $\Re^3$, el conjunto $\{(1;0;0),(2;2;0),(3;3;3)\}$

17) Explicar por qué los siguientes conjuntos no son una base de los espacios vectoriales indicados.

a) $A_1 = \{(1;2),(0;3),(2;7)\}$ para $\Re^2$.

b) $A_2 = \{(-1;3;2),(6;1;1)\}$ para $\Re^3$.

c) $A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \right\}$ para $\Re^{2x2}$.

18) ¿Qué valores de $k \in \Re$ hacen que el conjunto $\{(1;0;\ k),(k;1;0),(k+1;1;\ k)\}$ sea una base de $\Re^3$?

19) Verificar que el conjunto solución del sistema homogéneo asociado al siguiente sistema de ecuaciones es un subespacio de $(\Re^3;+;\Re;.)$

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ 6x - 7y + z = -1 \\ x + 4y - 5z = 4 \end{cases}$$

a) Dar una base y su dimensión.

b) Si el vector $\vec{v} = (3;3;3)$ pertenece al subespacio, expresarlo en dicha base.

20) Verificar que el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x \qquad\ + 2z = 0 \end{cases}$ es un subespacio de $(\Re^3;+;\Re;.)$

a) Dar una base y su dimensión.

b) Si el vector $\vec{v} = (-4;\ 5;\ 2)$ pertenece al subespacio, expresarlo en dicha base.

21) En $\Re^3$ se define $A = \{(k;1;k),(k;2;2k),(3k;k;-k)\}$.

a) Hallar todos los valores de ***k*** para que el conjunto ***A*** sea una base de $\Re^3$.

b) Hallar todos los valores de ***k*** para que ***A*** genere un subespacio de dimensión 2.

22) En $\Re^3$ se define $A = \{(2;k;1),\ (6;1;5)\ ,(2k;1;k+2)\}$

a) Hallar todos los valores de ***k*** para que el conjunto ***A*** no sea una base de $\Re^3$.

b) Si ***k = 0*** hallar el subespacio generado, una base del mismo y su dimensión.

23) Dado $A = \{(-1\ ;2\ ;4),(0\ ;\ 1\ ;2),(1;-1\ ;\ k)\}$ determinar los valores de $k \in \Re$ para que el conjunto genere un subespacio propio de $\Re^3$.

Reemplazar a ***k*** por los valores obtenidos y hallar el subespacio generado, una base del mismo y su dimensión.

24) Un valor de **"*a*"** para que el conjunto solución del sistema homogéneo asociado a**:**

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ (a+1)x_2 + 2x_3 = 4 \\ (a^2-1)x_3 = 1 \end{cases}$$

sea un subespacio de $(\Re^3;+;\Re;\ .\ )$ de dimensión cero es:

a) ***a*** **= 0** ***b)*** ***a*** **= 1** ***c)*** ***a*** **= –1** ***d)*** ***a*** **= 2**

25) Un consumidor tiene un ingreso de **$ 800** y lo destina a la compra de dos bienes ***A*** y ***B***, cuyos precios unitarios son respectivamente $\boldsymbol{p_1 = 160}$ y $\boldsymbol{p_2 = 80}$.

a) Escribir el vector de precios y representarlo gráficamente.
b) Escribir la ecuación presupuestaria y grafique la recta de posibilidades de consumo.
c) ¿Cuál es la cantidad máxima de bienes ***B*** que el consumidor puede adquirir con su ingreso, sin adquirir ningún bien ***A***?

26) El plano balance que contiene todos los presupuestos que tienen un gasto de **$ 3000** para la adquisición de tres bienes, escrito en forma segmentaria es $\boldsymbol{\frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{15}+\frac{x_3}{10}=1}$

a) Representarlo
b) Escribir la ecuación presupuestaria
c) Hallar el vector de precios

27) Sabiendo que:

a) El vector de precios es un múltiplo escalar del vector **(6; 8; 7)**.
b) Una de las posibilidades de consumo es $(x_1; x_2; x_3) = (\mathbf{40;\ 50;\ 30})$
c) El ingreso es igual a **$ 10.200.**

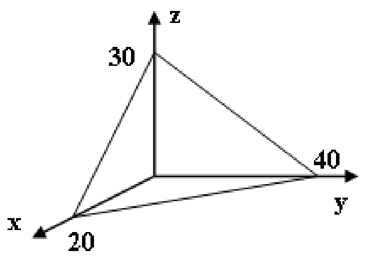
Hallar:
a) La ecuación presupuestaria.
b) El vector de precios.

28) La ecuación del plano balance que contiene todos los presupuestos que tienen un gasto de **$5000** para la adquisición de tres bienes es $\frac{x}{100}+\frac{y}{200}+\frac{z}{500}=1$.

a) Hallar el vector de precios.

b) Calcular los valores de $\alpha \in \Re$ para los cuales $\alpha(4;6;15)$ es una posibilidad de consumo.

29) El siguiente gráfico representa el plano balance del presupuesto de un consumidor cuyo ingreso es de **$ 1200** y lo destina en su totalidad a la compra de tres bienes



Si una posibilidad de consumo es $(5;6;\alpha)$

El valor de α es**:**

a) $\alpha = \frac{16}{3}$

b) $\alpha = 18$

c) $\alpha = 7$

d) **ninguno de los anteriores**

30) Hallar tres posibilidades de consumo correspondientes a la recta balance de ecuación $\frac{x}{18}+\frac{y}{9}=1$ distintas de $(18;0)$ y $(0;9)$. Escribir cada una de ellas como combinación lineal de estas últimas indicando el tipo de combinación lineal que resulta.

31) Un individuo tiene un ingreso de **\$8000** y lo destina en su totalidad a la compra de tres bienes. Si una posibilidad de consumo es $\mathbf{(20;50;50)}$ y el vector de precios es un múltiplo escalar de $\mathbf{(5;10;8)}$, hallar:

a) La ecuación presupuestaria.

b) El vector de precios.

c) Tres posibilidades de consumo diferentes de la dada.

d) La cantidad máxima de cada uno de los bienes que puede adquirir.

e) Una posibilidad de consumo sabiendo que el individuo adquiere **40** bienes del primer tipo. ¿Cuántas hay?

f) Una posibilidad de consumo sabiendo que el individuo adquiere **40** bienes del primer tipo y **20** del tercer tipo. ¿Cuántas hay?

32) Un consumidor tiene un ingreso de **\$2000** y lo destina en su totalidad a la compra de tres bienes. El vector de precios es $\mathbf{(10k^2;\ 2k^2+8;\ 5k^2-10)}$ y una posibilidad de consumo es $\mathbf{(20;50;40)}$.

a) Hallar los valores de k.

b) Determinar la ecuación presupuestaria y dos posibilidades de consumo distintas de la dada.

c) Sabiendo que el consumidor adquiere **50%** más de unidades del primer bien que del segundo, indicar una posibilidad de consumo.

33) Un consumidor tiene un ingreso de **\$ 450** y lo destina en su totalidad a la adquisición de dos bienes. Sabiendo que $\mathbf{(54;90)}$ y $\mathbf{(18;180)}$ son dos posibilidades de consumo; otra posibilidad de consumo es:

a) $(2;5)$ ***b)*** $(200;10)$ ***c)*** $(5;2)$ ***d)*** $(10;200)$

RESPUESTAS

1) *a)* **es subespacio** *b)* $y = 2x$ **, SI**

2) *a)* **no es subespacio** *b)* $y = mx + b$ **, NO**

3) **La respuesta correcta es la** *a)*

4)

i.	***a)* No**	***b)* Si**	***c)* Si**	***d)* No**	
ii.	***a)* Si**	***b)* No**	***c)* No**	***d)* Si**	
iii.	***a)* Si**	***b)* Si**	***c)* No**	***d)* Si**	***e)*No**
iv.	***a)* Si**	***b)* Si**	***c)* Si**		

5) *a)* $S = \left\{ \left(x_1; x_2; x_3 \right) \in \Re^3 \,/\, x_2 = -4 \;\wedge\; x_1 - x_3 = 8 \right\}$ ***S*** **no es un subespacio ya que** $(0;0;0) \notin S$

b) $S = \left\{ \left(0;0;0 \right) \right\}$ **es un subespacio trivial,** ***S*** **es un subespacio de** $(\Re^3;+;\Re;.)$

6) *a)* $(4;\,3;\,-1) = -2v_1 + 3v_2$

b) **No**

c) $k = -7$

d) $-a + 3b + 5c = 0$

7) $k = 1$

8) *a)* **LI** *b)* **LD** *c)* **LI** *d)* **LD**

9) $a.d - b.c \neq 0$

10) *a)* **LI** *b)* **LD** *c)* **LD** *d)* **LD**

11) $c \neq 0$

12) *i)* *a)* **Es generador de** $\Re^2$.

b) **Genera un subespacio propio de** $\Re^2$. $\bar{A}_2 = \{(a;a) \text{ con } a \in \Re\}$.

c) **Es generador de** $\Re^2$.

ii) *a)* **Es generador de** $\Re^3$.

b) **Genera un subespacio propio de** $\Re^3$. $\bar{B}_2 = \left\{(a;b;\frac{3}{2}b) \text{ con } a,b \in \Re\right\}$.

c) **Genera un subespacio propio de** $\Re^3$. $\bar{B}_2 = \{(-b+2c\,;b;c) \text{ con } b,c \in \Re\}$.

iii) *a)* **Es generador de** $\Re^{2x2}$.

b) **Genera un subespacio propio de** $\Re^{2x2}$. $\bar{C}_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ con } a,b,c \in \Re\right\}$.

13) $k = 3$

14) **Si, porque** $\vec{g} = 5\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$

15) $(a;b;c) = c.(1;1;1) + (b-c).(1;1;0) + (a-b).(1;0;0)$

16) *a), b), e)* es base *c), d)* no es base

17) *a)* Es LD *b)* Genera un subespacio propio de $\Re^3$ *c)* Es LD.

18) Ninguno, ya que $\forall k \in \Re$ el conjunto de vectores de LD

19)

a) $S = \left\{ (x;y;z) \in \Re^3 \,/\, x = z \wedge y = z \right\} = \left\{ (z;z;z) \right\} \rightarrow B_{S=} \left\{ (1;1;1) \right\}$ $\dim S = 1$ *b)* $\vec{v} = [3]_B$

20) *a)* $S = \left\{ (x;y;z) \in \Re^3 \,/\, x = -2z \wedge y = \frac{5}{2}z \right\} = \left\{ \left(-2z; \frac{5}{2}z; z \right) \right\} \rightarrow B_{S=} \left\{ \left(-2; \frac{5}{2}; 1 \right) \right\}$ $\dim S = 1$ *b)* $\vec{v} = [2]_B$

21) *a)* $k \in \Re \,/\, k \neq 0 \wedge k \neq -1$ *b)* $k = -1$

22) *a)* $k = 0 \quad \vee \quad k = 3$

b) $\overline{A} = \left\{ (-4b + 2c; b; c) \text{ con } b, c \in \Re \right\}$

23)

a) $k = -2$

b) $\overline{A} = \left\{ (a;b;2b) \text{ con } a, b \in \Re \right\}$ $B = \left\{ (1;0;0), (0;1;2) \right\}$ $\dim\left(\overline{A}\right) = 2$

24) *d)* $a = 2$

25) *a)* $p = (160; 80)$

b) $160x + 80y = 800$

c) 10

26) ***b)*** **$500x_1 + 200x_2 + 300x_3 = 3000$** ***c)*** **$p = (500; 200; 300)$**

27) ***a)*** **$72x + 96y + 84z = 10200$** ***b)*** **$p = (72; 96; 84)$**

28) ***a)*** **$(50;25;10)$** ***b)*** **$\alpha = 10$**

29) ***b)*** **$\alpha = 18$**

30) A cargo del alumno

31) ***a)*** **$40x + 80y + 64z = 8000$**

b) **$(40;80;64)$**

c) **A cargo del alumno**

d) **200 del bien I; 100 del bien II; 125 del bien III.**

e) **$(40;40;50)$. Hay infinitas**

f) **$(40;\ 64;\ 20)$. Es la única posibilidad**

32) ***a)*** **$k = -2 \quad k = 2$**

b) **$40x + 16y + 10z = 2000$**

c) **Cambiar la condición $x = 1,5y$ a *b)*, una posibilidad es $(15;10;124)$ ó $(30;20;48)$**

33) ***d)*** **(10; 200)**