UNIDAD TEMÁTICA 3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1) Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

a) Escribir la matriz de los coeficientes de cada uno de los sistemas.

b) Determinar la matriz ampliada de cada uno de ellos.

c) Escribir cada uno de los sistemas en forma matricial.

2) Resolver por el método matricial (si es posible)

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} -x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = -5 \end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -5x_1 + 13x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$

3) Hallar todos los valores de $k \in \Re$ para que las ecuaciones dadas no formen un sistema de Cramer: $\begin{cases} 4x - 2y - 8z = -2 \\ -2x + 3y + 5z = 2 \\ 2x - y + kz = -1 \end{cases}$

4) Resolver aplicando Cramer (si es posible)

a) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 4x - 3z = 6 \\ 3y + 4z = 5 \\ -2x + 5z = 4 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 8x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$

5) ***i)*** Discutir la compatibilidad y determinar el conjunto solución de los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss-Jordan y el método de eliminación de Gauss.

ii) Cuando sea posible, escribir la solución general del sistema dado como suma de la solución del sistema homogéneo asociado y una de sus soluciones particulares.

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + 7z = 3 \\ -3x - 4y - 5z = -5 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$ *g)* $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$

6) Demostrar que los siguientes sistemas tienen solamente la solución trivial:

a) $\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 3x+7y+6z=0 \\ 2x+3y+7z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ 3x-4y+3z=0 \\ 4x-2y+3z=0 \end{cases}$

7) Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta:

a) Un sistema de ***m*** ecuaciones lineales con ***n*** incógnitas admite solución única sí y solo sí el rango de la matriz ampliada es ***n***

b) Todos los sistemas homogéneos son compatibles determinados

c) Todos los sistema de ***n*** ecuaciones con ***n*** incógnitas pueden resolverse mediante el método matricial

d) Ninguna de las anteriores

8) En los siguientes sistemas lineales determinar todos los valores de $k \in \Re$ para los cuales el sistema resultante tenga:

- ♦ solución única
- ♦ ninguna solución
- ♦ infinitas soluciones

a) $\begin{cases} x+ky+z=k \\ kx+y+z=1 \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+(k^2-5)z=k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+3z=1 \\ 3x+2y-z=2 \\ x+y-kz=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+kz=2 \\ 3x+4y+2z=k \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

9) Sea $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right)$ la matriz ampliada de un sistema lineal. ¿Para qué valores de **"*a*"** y de **"*b*"** el sistema:

a) Tiene solución única?

b) Es compatible indeterminado y el rango de la matriz del sistema es igual a **2**?

c) Es compatible indeterminado y tiene dos variables libres?

d) Es incompatible

10) El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 2q \\ 2x - 3y + 2z = 4q \\ 3x - 2y + pz = q \end{cases}$ es incompatible para:

a) $p = 3 \quad q \neq 0$

b) $p \neq 3 \quad q \neq 0$

c) $p \neq 3 \quad q = 0$

d) **Ninguna de las anteriores**

11) Determinar el valor de $m \in \Re$ para que los siguientes sistemas sean equivalentes:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = 2 \\ x - 2z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$$

12) ***a)*** Hallar los valores de $k \in \Re$ para los que el vector $(1;4)$ es la única solución del sistema: $\begin{cases} 3x + \quad 3y = 15 \\ 2x + (k+1)y = -6 \\ 4x + (k+4)y = 8 \end{cases}$

b) Hallar los valores de $k \in \Re$ para los que las siguientes rectas se intersecan en el punto $(3;-2)$: $\begin{cases} x + \quad 3y = -3 \\ -2x + (k-3)y = -4 \\ 3x + \quad 2y = (k+3) \end{cases}$

c) Hallar todos los valores de $k \in \Re$ para los que el conjunto solución del sistema $\begin{cases} 3x - \quad y = 2 \\ x + 2ky = 2/3 \end{cases}$ es la recta $3x - 2 = y$

13) ***a)*** Analizar si el vector $(2;4;-1)$ es solución del sistema $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -10 \\ x - 2y + 3z = -9 \\ 5x + \quad z = 9 \end{cases}$

b) En caso de serlo, analizar si es única.

14) La solución general del sistema $\begin{cases} x + 3y + 2z - w = 0 \\ 2x - 3y - 2z + w = 0 \\ -3y - 2z + w = 0 \end{cases}$ es

a) $S = \left\{ (x;y;z;w) \in \Re^4 \,/\, x = 1 \wedge w = \dfrac{9y+6z}{3} \right\}$

b) $S = \left\{ (x;y;z;w) \in \Re^4 \,/\, x = y = z = w = 0 \right\}$

c) $S = \left\{ (x;y;z;w) \in \Re^4 \,/\, x = 0 \wedge w = 3y + 2z \right\}$

d) Ninguna de las anteriores

15) Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} kx - 3y = 2 \\ 2kx + (k-5)y = k \end{cases}$

Analizar las cuatro posibilidades e indique cuáles son las correctas, justificando:

a) si $k = 3$ el sistema es compatible determinado.

b) si $k = 2$ entonces $s = (4;2)$ es una de las infinitas soluciones del sistema.

c) si $k = -2$ el sistema es compatible indeterminado.

d) si $k = 0$ el sistema es incompatible.

16) Sabiendo que $s = (1;\ 1;\ 1)$ es solución del sistema:

$$\begin{cases} 3ax + 2by + z = -4 \\ bx + y - az = 1 \\ -4x - y + 2z = -3 \end{cases}$$

Analizar las cuatro posibilidades e indique cuál es la correcta, justificando:

a) si $a = b = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) si $a = b = -1$ el sistema es compatible determinado.

c) $h = (2z;\ 2z;\ z)$ es la solución del sistema homogéneo asociado.

d) $(2/5;\ -2/5;\ 0)$ es una solución del sistema homogéneo asociado.

17) La siguiente es una matriz ampliada de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: $\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k^2-1} & \boldsymbol{k-1} \end{array}\right)$

Analizar las cuatro posibilidades e indique cuál es la correcta, justificando:

a) Si $\boldsymbol{k = 1}$ el sistema es incompatible.

b) Si $\boldsymbol{k = -1}$ el sistema es incompatible.

c) Si $\boldsymbol{k = 0}$ el sistema tiene solución única.

d) Si $\boldsymbol{k = 2}$ entonces $\boldsymbol{s}$ **= (2/3; 2/3; 1/3)** es una de las infinitas soluciones del sistema.

18) La siguiente es la matriz ampliada de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: $\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k^2-4} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{k^2-2k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$

Analizar las cuatro posibilidades e indique cuál es la correcta, justificando:

a) Si $\boldsymbol{k = -2}$ ***ó*** $\boldsymbol{k = 2}$ el sistema tiene infinitas soluciones

b) La única solución del sistema para $\boldsymbol{k = -2}$ es $\boldsymbol{s = (1;\ 0;\ 0)}$

c) El sistema no admite solución si $\boldsymbol{k = 3}$

d) Si $\boldsymbol{k = 0}$ el sistema es compatible determinado

19) Una caja contiene **13 monedas** con las denominaciones de **un centavo, cinco centavos** y **diez centavos**, con un valor total de **83 centavos**. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay en la caja? (Recuerde que busca soluciones naturales).

20) Un campesino alimenta su ganado con una mezcla de dos tipos de alimento. Una unidad estándar del **tipo A** suministra a una cabeza de ganado **10%** de sus requerimientos diarios mínimos de proteínas y **15%** de carbohidratos.
El **tipo B** contiene, en una unidad estándar **12 %** del requerimiento de proteínas y **8 %** del de carbohidratos.
Si el campesino desea dar a sus animales el **100%** de sus requerimientos mínimos. ¿Cuántas unidades de alimentos debe dar a cada cabeza de ganado diariamente?

21) Un grupo de **18** personas (hombres, mujeres y jóvenes) ganan un total de **$ 250** por hora. Los hombres ganan **$ 20** por hora, las mujeres **$ 15** por hora y los jóvenes **$10** por hora.
Halle el número de hombres, mujeres y jóvenes.

22) Una empresa confecciona banderas, camisetas y gorros. En el mes de marzo entraron **40 metros de tela** y **20 rollos de hilo**. Cada bandera necesita **4 m de tela** y **2 rollos de hilo**. Cada camiseta necesita **2 m de tela** y **1 rollo de hilo**. Los gorros usan **1 m de tela** y **1 rollo de hilo**.
Si se consumen totalmente las materias primas que ingresaron en marzo.

a) Hallar la solución general del sistema.
b) ¿Es toda solución del sistema una solución del problema? Justificar
c) Hallar todas las soluciones del problema.
d) Decidir si es posible fabricar todos los productos.

23) Un departamento de Caza y Pesca Estatal suministra tres tipos de alimentos a un lago que mantiene a tres especies de peces. Cada pez de la **especie I** consume cada semana un promedio de una unidad de **alimento 1**, una unidad de **alimento 2**, y dos unidades de **alimento 3**. Cada pez de la **especie II** consume cada semana un promedio de tres unidades de **alimento 1**, cuatro unidades de **alimento 2** y cinco unidades de **alimento 3**.
Para un pez de la **especie III**, el consumo semanal promedio es de dos unidades del **alimento 1**, una unidad del **alimento 2** y cinco unidades del **alimento 3.**
Cada semana se proporcionan al lago **15.000** unidades de alimento 1, **10.000** unidades del segundo y **35.000** del tercero. Suponemos que los tres alimentos se consumen ¿qué población de cada especie se encontrará en coexistencia? ¿Existe una solución única?

24) Una compañía fabrica tres tipos de muebles para jardín: sillas, mecedoras y sillones. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se muestra en la tabla. La compañía tiene un almacén de **400** unidades de madera, **600** de plástico y **1500** de aluminio. Para su producción de final de temporada la compañía desea agotar todas las existencias. Para lograrlo ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

	Madera	**Plástico**	**Aluminio**
Sillas	**1**	**1**	**2**
Mecedoras	**1**	**1**	**3**
Sillones	**1**	**2**	**5**

25) Cuando la gente invierte dinero hay profesionales a quienes se acude en busca de orientación respecto al portafolio o cartera que mejor cubra las necesidades del inversionista. Supóngase que un inversionista ha consultado a un experto en inversiones. Después de conversar con el cliente, el experto decide que el cliente desea una cartera que posea las siguientes cualidades:

1) el valor total de cartera en el momento de la compra es **$ 50.000.**
2) el crecimiento anual esperado en el valor de mercado es de **12%.**
3) el factor promedio de riesgo es de **10%.**

Se han identificado tres opciones con las tasas relativas de crecimiento y riesgo que aparecen en la siguiente tabla.

Inversión	**Crecimiento anual esperado en el valor de mercado**	**Riesgo previsto**
1	**16 %**	**12 %**
2	**8 %**	**9 %**
3	**12 %**	**8 %**

Determinar si hay una estrategia de inversión que satisfaga los deseos del cliente.

26) Una compañía de inversiones vende tres tipos de fondos de inversión: Classic (C), de Lujo (L) y Gold (G). Cada unidad de **C** tiene **12 acciones tipo A**, **16 tipo B** y **8 tipo C**. Cada unidad de **L** tiene **20 acciones tipo A**, **12 tipo B** y **28 tipo C**. Cada unidad de **G** tiene **32 acciones tipo A**, **28 tipo B** y **36 tipo C**.

Un inversionista desea comprar exactamente **220** acciones tipo **A**, **176** tipo **B** y **264** tipo **C** comprando unidades de los tres fondos. Determinar, si es posible, las combinaciones de unidades **C**, **L** y **G** que satisfagan los requerimientos del inversionista.

27) Sea $p = \frac{8}{100}q + 50$ la ecuación de oferta para cierto fabricante, y supóngase que la ecuación de demanda para su producto sea $p = -\frac{7}{100}q + 65$.

a) Determinar el precio de equilibrio

b) Si se carga un impuesto de **\$ 1,50** por unidad al fabricante ¿Cómo se verá afectado el precio original de equilibrio si la demanda permanece igual?

c) Determinar los ingresos totales que obtiene el fabricante en el punto de equilibrio tanto antes como después del impuesto.

28) Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son: $3q - 200p + 1800 = 0$ y $3q + 100p - 1800 = 0$ respectivamente, en donde ***"p"*** representa el precio por unidad y ***"q"*** el número de unidades por intervalo.

a) Obtener el precio de equilibrio. Grafique.

b) Determinar el precio de equilibrio cuando se carga al proveedor con un impuesto de **27 centavos** por unidad.

RESPUESTAS

1)

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&4&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad A'=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-2\\1&4&-1&5\\1&1&1&6\end{array}\right)\qquad A.X=B\Rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&4&-1\\1&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\\6\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\2&1&1\\4&-2&3\end{pmatrix}\qquad A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&-1&-1&7\\2&1&1&5\\4&-2&3&7\end{array}\right)\qquad A.X=B\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\2&1&1\\4&-2&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\\5\\7\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad A'=\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&1&6\\1&1&1&10\end{array}\right)\qquad A.X=B\Rightarrow\begin{pmatrix}3&-2&1\\1&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix}$$

2) ***a)*** $x = 11/7$; $y = 1/7$

b) $x_1 = 13/5$; $x_2 = -32/5$; $x_3 = -3/5$

c) **no se puede resolver por el método matricial.**

3) $k = -4$

4) ***a)*** $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 2$

b) $x_1 = 3$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$

c) **no se puede resolver aplicando Cramer**

5) *i. a)* **S .C.D.** $x = -6, y = 3, z = 2 \Rightarrow S = \{(-6;\ 3;\ 2)\}$

b) **S.I.** $\Rightarrow S = \varnothing$

c) **S.I.** $\Rightarrow S = \varnothing$

d) **S.C.D.** **Solución trivial:** $x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow S = \{(0;\ 0;\ 0)\}$

e) **S.C.D.** $x_1 = 1\ ; x_2 = -1;\ x_3 = 2\ ;\ x_4 = -2 \Rightarrow S = \{(1; -1;\ 2\ ; -2\ )\}$

f) **S.C.I.** $x_1 \in \Re\ ,\ x_2 = -10x_1 - 3x_3,\ x_3 \in \Re\ ,\ x_4 = -14x_1 - 5x_3$

$$\Rightarrow \mathrm{S} = \{(x_1; x_2; x_3\ ; x_4) \in \Re^4 \ / x_2 = -10x_1 - 3x_3 \ \wedge \ x_4 = -14x_1 - 5x_3\}$$

g) **S.C.I.** $x_1 = 1\ ,\ x_2 = 2x_3,\ x_3 \in \Re,\ x_4 = -3x_5,\ x_5 \in \Re$

$$\Rightarrow \mathrm{S} = \{(x_1; x_2; x_3\ ; x_4; x_5) \in \Re^5 \ / x_1 = 1 \wedge \ x_2 = 2x_3 \ \wedge \ x_4 = -3x_5\}$$

ii. g)

$$S = \{(1;\ 2x_3\ ;\ x_3\ ; -3x_5\ ;\ x_5)\}$$

$$S_H = (0;\ 2x_3\ ;\ x_3\ ; -3x_5\ ;\ x_5) \qquad S_{particular\ no\ homogéneo} = (1;0;0;0;0)$$

$$S_{general} = S_{particular} + S_H = (1;0;0;0;0) + (0\ ; 2x_3\ ;\ x_3\ ; -3x_5\ ;\ x_5)$$

6) **A cargo del alumno. Solución Trivial** $S = \{(0;0;0)\}$

7) *d)*

8) *a)* $k \neq 1$, $k \neq -2$ **S.C.D.**

$k = -2$ **S.I.**

$k = 1$ **S.C.I.**

b) $k \neq 2$; $k \neq -2$ **S.C.D.**

$k = -2$ **S.I.**

$k = 2$ **S.C.I.**

c) $k \neq 2$ **S.C.D.**

$k = 2$ **S.I.**

No existe "*k*" para el cual el sistema sea compatible indeterminado

d) $k \neq 3$ **S.C.D.**

$k = 3$ **S.C.I.**

No existe "*k*" para el cual el sistema sea incompatible

9) *a)* $a \neq 0 \wedge b \neq 2$ *b)* $a \neq 0 \wedge b = 2$ *c)* $a = 0 \wedge b = 2$ *d)* $a = 0 \wedge b \neq 2$

10) ***a)***

11) $m = 3$

12) ***a)*** $k = -3$ ***b)*** $k = 2$ ***c)*** $k = -\frac{1}{6}$

13) **Es solución única**

14) ***c)***

15) ***a)*** **Verdadero** ***b)*** **Falso** ***c)*** **Falso** ***d)*** **Verdadero**

16) ***a)***

17) ***b)***

18) Solución correcta: a) Nota: ¡Ojo! El sistema tiene siempre infinitas soluciones, no sólo si $k = -2$ **y** $k = 2$**.**

19) $S = \{(3;\ 4;\ 6)\}$

20) 4 unidades de A; 5 unidades de B

21) "*x*" número de hombres, "*y*" número de mujeres, "*z*" número de jóvenes $\Rightarrow$ **Solución del sistema** $\begin{cases} x = -4 + z \\ y = 22 - 2z \end{cases}$ $\text{con } x, y, z \in N$

22) *a)* $\begin{cases} y = 20 - 2x \\ z = 0 \end{cases}$ **donde** x, y, z **es el número de banderas, camisas y gorros respectivamente** *b)* **No**

c) $\begin{cases} y = 20 - 2x \\ z = 0 \end{cases}$ con $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 20$

d) **No se pueden producir todos los productos ya que el número de gorros es 0**

23) x, y, z es el **número de peces** $\begin{cases} x = 30.000 - 5z \\ y = -5.000 + z \end{cases}$ con $x, y, z \in \mathbb{N}$ donde $5.000 < z < 6.000$, $0 < y < 1.000$, $0 < x < 5.000$

24) 100 sillas, 200 sillones, 100 mecedoras

25) $(20.000 ; 20.000 ; 10.000) = (I_1 ; I_2 ; I_3)$

26) $\begin{cases} x = 5 - z \\ y = 8 - z \end{cases}$ con las siguientes restricciones a las variables $0 < x < 5$, $3 < y < 8$, $0 < z < 5$

Soluciones posibles: $(1;4;4)$, $(2;5;3)$, $(3;6;2)$, $(4;7;1)$

27) $p = \$\ 58$ $p = \$\ 58{,}70$ $I_t = \$\ 5800$ $I_t = \$\ 5283$

28) *a)* **$ 12** *b)* **$ 12,18**